Πανεπιστήμιο Κρήτης - Σεπτέμβριος 2015

Παραμετρική Στατιστική

1.
Το νόμισμα Α έχει πιθανότητα κορώνας p και το νόμισμα Β έχει πιθανότητα κορώνας q. Εκτελούμε δύο πειράματα. Στο πρώτο ρίχνουμε το ζεύγος νομισμάτων Ν φορές και καταγράφουμε μία ρίψη του ζεύγους ως επιτυχία αν και μόνο αν τουλάχιστον ένα από τα δύο νομίσματα έρθει κορώνα. Στο δεύτερο πείραμα ρίχνουμε ομοίως το ζεύγος νομισμάτων Ν φορές και καταγράφουμε μία ρίψη του ζεύγους ωε επιτυχία αν και μόνο αν ακριβώς ένα από τα δύο νομίσματα έρθει κορώνα.
Ας είναι X και Y ο αριθμός των επιτυχιών στο πρώτο και το δεύτερο πείραμα αντίστοιχα. Βρείτε μία συνάρτηση των X, Y, N που να είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του αριθμού pq.

2.
Οι ανεξάρτητες μετρήσεις $X_1, X_2, ..., X_N$ έχουν ληφθεί από μία κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Δείξτε πώς από το δείγμα θα βρείτε εκτιμήτριες μεγίστης πιθανοφάνειας για τις παραμέτρους $\theta_1 = \mu, \theta_2 = \sigma^2$ της κατανομής.

3.
Χρησιμοποιώντας ροπογεννήτριες συναρτήσεις αποδείξτε ότι το άθροισμα δύο ανεξαρτήτων κανονικών $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ ακολουθεί επίσης κανονική κατανομή $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ και υπολογίστε τα μ, σ μέσω των $\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2$.

4.
Οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, ..., X_N$ είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφες στο διάστημα $[a, a+1]$. Αν ο δειγματικός μέσος των X_j προκύψει να είναι ίσος με 100 τότε να χρησιμοποιήσετε την κανονική προσέγγιση (εξηγείστε πλήρως το τι προσεγγίζετε με τι) και βρείτε ένα διάστημα εμπιστοσύνης 90% για το a. Στην απάντησή σας, εκτός από το N, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και την συνάρτηση Φ (συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής $\mathcal{N}(0,1)$) και την αντίστροφη της Φ^{-1}.

5.
Τρία φυσικά μεγέθη X, Y, Z ικανοποιούν έναν φυσικό νόμο της μορφής

$$Z = \lambda X + \mu Y,$$

όπου λ, μ δύο άγνωστες σταθερές. Κάνουμε N μετρήσεις των φυσικών αυτών μεγεθών από τις οποίες προκύπτουν οι μετρήσεις $(z_1, x_1, y_1), ..., (z_N, x_N, y_N)$. Οι μετρήσεις έχουν και σφάλματα άρα οι τιμές αυτές δεν ικανοποιούν τις εξισώσεις $z_i = \lambda x_i + \mu y_i$. Δείξτε πώς από τις μετρήσεις αυτές θα βρείτε μια εκτιμήτρια για τα λ, μ η οποία να ελαχιστοποιεί το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων $\epsilon_i = z_i - \lambda x_i - \mu y_i$. Δεν χρειάζεται να υπολογίσετε πλήρως τις εκφράσεις για τα λ, μ. Αρκεί να υποδείξετε ένα 2×2 γραμμικό σύστημα λύση του οποίου να είναι τα λ, μ.