Πανεπιστήμιο Κρήτης - Ιανουάριος 2017

Θεωρία Συνόλων

1.
Έστω A, B, C δεδομένα σύνολα.

(i) Υπολογίστε τα σύνολα $\bigcap\bigcap(A,B)$, $\bigcup\bigcap(A,B)$ και $\bigcap\bigcup(A,B)$.

(ii) Δείξτε από τα αξιώματα ότι υπάρχουν τα σύνολα $\{A,B,C\}$ και $A \cup B \cup C$. Σε κάθε περίπτωση, να αναφέρετε ποιό ακριβώς αξίωμα της (ZFC) συνολοθεωρίας επικαλείστε σε κάθε βήμα.

2.
(i) Έστω σύνολα A και B τέτοια ώστε $A \subseteq B$. Αν C μη κενό σύνολο, να δείξετε ότι υπάρχει μία 1-1 συνάρτηση $F : C^A \to C^B$.

(ii) Έστω δύο σύνολα x και y τέτοια ώστε $x \neq y$. Θεωρώντας το $I = \{x, y\}$ ως σύνολο δεικτών, έστω A_x και A_y δύο δεδομένα και μη κενά σύνολα τα οποία απαρτίζουν την οικογένεια $(A_i)_{i \in I}$. Ορίστε το γενικευμένο καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{i \in I} A_i$ αυτής της οικογένειας και κατόπιν αποδείξτε ότι $\prod_{i \in I} A_i \sim A_x \times A_y$.

3.
Έστω $A \subseteq \omega$ με $A \neq \varnothing$. Δείξτε ότι $\bigcap A \in A$.

4.
Θυμηθείτε ότι $2 = \{0, 1\}$.

(i) Έστω πληθάριθμος $k > 1$. Αρχικά, ορίστε το $k \cdot k$, το 2^k και το k^k. Κατόπιν, με χρήση του Θεωρήματος των Cantor-Schröder-Bernstein να δείξετε ότι αν $k \cdot k = k$ τότε $2^k = k^k$.

(ii) Έστω δεδομένο σύνολο A. Χωρίς χρήση πληθαρίθμων, δείξτε ότι αν $A \sim A \times 2$, τότε $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$.
(Λύση αυτού του ερωτήματος με χρήση πληθαρίθμων απλά δεν λαμβάνεται καθόλου υπ΄ όψιν.)

5.
Έστω $(A, <_A)$ καλά διατεταγμένο σύνολο (με $A \neq \varnothing$) και έστω $b \notin A$. Θεωρούμε το σύνολο $B = A \cup \{b\}$, στο οποίο ορίζουμε την διμελή σχέση $<_B$ ως εξής: για κάθε $x, y \in B$,

$$x <_B y \leftrightarrow (x \in A \wedge y \in A \wedge x <_A y) \vee (x \in A \wedge y = b).$$

Αρχικά, δείξτε ότι το A είναι γνήσιο αρχικό τμήμα του $(B, <_B)$. Κατόπιν, δείξτε ότι η σχέση $<_B$ είναι καλή διάταξη στο σύνολο B.