Πανεπιστήμιο Κρήτης - Ιούνιος 2016

Θεωρία Πιθανοτήτων

1.

Η διακριτή τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Poisson με συνάρτηση μάζας πιθανότητας $f_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Να υπολογίσετε το άνω φράγμα που δίνει η ανισότητα Chebychev για την πιθανότητα $P(|X-\lambda| \geq 2)$.

2.

Οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X, Y ακολουθούν από κοινού κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}},$$

όπου $\sigma > 0$ σταθερά. Υπολογίστε τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών R, Φ οι οποίες ορίζονται από τις σχέσεις $X = R\cos\Phi$, $Y = R\sin\Phi$.

3.

Ένα κουτί περιέχει λευκές και μαύρες σφαίρες. Όταν δύο σφαίρες επιλέγονται χωρίς επανατοποθέτηση, υποθέτουμε ότι η πιθανότητα και οι δύο να είναι λευκές είναι $1/3$. Τότε το μικρότερο πλήθος σφαιρών στο δοχείο πρέπει να είναι N. Εάν επιπλέον ξέρουμε και ότι το πλήθος των μάυρων σφαιρών είναι άρτιο, τότε το ελάχιστο πλήθος σφαιρών στο δοχείο πρέπει να είναι M. Υπολογίστε τα N, M.

4.

Επιλέγουμε τυχαία έναν αριθμό $X \in (0,1)$ και έπειτα επιλέγουμε τυχαία έναν αριθμό $Y \in (X,1)$. Υπολογίστε την μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής Y.

5.

Εάν $f_{X,Y}(x,y)$ είναι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των συνεχών τυχαίων μεταβλητών X, Y, τότε βρείτε έναν τύπο για την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_Z(z)$ της τυχαίας μεταβλητής $Z = \frac{X}{Y}$.

6.

Ρίχνουμε 3 νομίσματα των 10, 20 και 50 λεπτών. Η τυχαία μεταβλητή ξ εκφράζει το άθροισμα των αξιών των νομισμάτων που δείχνουν κορώνα και η η το άθροισμα των αξιών των πρώτων 2 νομισμάτων που δείχνουν κορώνα. Υπολογίστε το πλήθος των τιμών που παίρνει η τυχαία μεταβλητή $E(\xi|\eta)$.