Πανεπιστήμιο Κρήτης - Ιούλιος 2020

Ανάλυση II

1.
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \sqrt{x}, x \in [0, +\infty)$.

(i) Εξετάστε εάν οι f, f^2 είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $[1, +\infty)$.

(ii) Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(t) = (f(t))^2 e^{-t}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, x]$ για κάθε $x > 0$ και εξετάστε αν η $G(x) = \int_0^x g(t)dt, x \geq 0$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$.

2.
Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 0$ για $x \leq 0$ και $f(x) = 1$ για $x > 0$.

(i) Δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[-1, 1]$ ώστε $U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) < \epsilon$. Τι συμπεραίνετε για την f στο $[-1, 1]$;

(ii) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων (f_n) στο $\mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Τι συμπεραίνετε;

3.
Δίνεται $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

(i) Εξετάστε αν η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(2020^n x)}{2^n}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής παντού στο $\mathbb{R}$.

(ii) Υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $\sup\limits_{x \in [0,1]} |p_n(x) - f(x^n)| \to 0$ καθώς $n \to \infty$;

4.
Δίνεται η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n(n+1)}$.

(i) Βρείτε το διάστημα σύγκλισης της παραπάνω δυναμοσειράς.

(ii) Δείξτε ότι $0 < f(x) < \frac{1}{1-x}$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

(iii) Δείξτε ότι $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.

5.
(i) Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $\int_0^1 f(x)x^{2020+n}dx = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, ...$ Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

(ii) Εξετάστε αν τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι ανοικτά ή κλειστά:
$(0, 1) \cup \{2\}, [2, 3), \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, ...\} \cup \{0\}$.