Πανεπιστήμιο Κρήτης - Σεπτέμβριος 2019

Ανάλυση I

1.
Δίνεται $f\mathbb{R} \to [1,+\infty)$ συνεχής συνάρτηση.

(i) Έστω (x_n) μία τυχαία ακολουθία πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι οι ακολουθίες $\left(\frac{1+|x_n|}{e^{|x_n|}}\right)$, $\left(\frac{1}{f\left(\frac{1+|x_n|}{e^{|x_n|}}\right)}\right)$ έχουν συγκλίνουσες υπακολουθίες.

(ii) Δείξτε ότι η ακολουθία $\left(f\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}\right)\right)$ συγκλίνει.

(iii) Υποθέτουμε επιπλέον ότι

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-f\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}\right)\right|<\frac{n^{2019}}{2019^n}$$

για άπειρα n. Δείξτε ότι $e\in f(\mathbb{R})$.

2.
(i) Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της παραγώγου για να δείξετε ότι η παράγωγος της $f(x)=1/x$ υπάρχει στο 1 και είναι ίση με -1.

(ii) Δίνεται $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ η οποία έχει άπειρες ρίζες. Δείξτε ότι η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει άπειρες ρίζες.

3.
Δίνεται $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f'(x)>1$ για κάθε $x>0$.

(i) Δείξτε ότι υπάρχει $x_0>2$ ώστε $\frac{f(x)}{x}>\frac{1}{2}$ για κάθε $x>x_0$.

(ii) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=[x_0]+1}^{\infty}\frac{1}{f(n)(\log(n+1))^2},\quad \sum_{n=[x_0]+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{f(n)},\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{f(x)^n},\ x>x_0.$$

4.
Δίνεται $f:A\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση, όπου $A\subseteq\mathbb{R}$ μη κενό και φραγμένο σύνολο.

(i) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $f(x_n)\to\inf f(A)$.

(ii) Είναι σωστό ότι $\sup(A+f(A))=\sup A+\sup f(A)$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. Σημειώνουμε ότι $A+f(A)=\{x+f(y):x,y\in A\}$.

(iii) Αν $f(x)=-x$ και $A=\{x_n:n=1,2,3,...\}$ όπου $x_n=\frac{1+2(-1)^n}{2n}, n=1,2,3,...$, υπολογίστε τα $\sup A,\inf A,\liminf x_n,\limsup x_n,\sup f(A),\inf f(A),\liminf f(x_n)$ και $\limsup f(x_n)$.

Λύσεις

1.

(i) Θέτουμε $a_n = \frac{1+|x_n|}{e^{|x_n|}}$ και $b_n = \frac{1}{f(a_n)}$. Υποθέτουμε αρχικά ότι η (x_n) είναι φραγμένη. Υπάρχει δηλαδή $M > 0$ ώστε $|x_n| \leq M$. Τότε $0 \leq a_n \leq \frac{1+M}{e^{-M}}$, άρα η (a_n) είναι φραγμένη. Επίσης, αφού $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq b_n \leq 1$. Άρα και η (b_n) είναι φραγμένη. Από το Θεώρημα Weierstrass κάθε μία από τις ακολουθίες (a_n), (b_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.
Ας υποθέσουμε τώρα ότι η (x_n) δεν είναι φραγμένη. Τότε η (x_n) έχει υπακολουθία (x_{n_k}) τέτοια ώστε $|x_{n_k}| \overset{k\to\infty}{\to} +\infty$. Τότε $a_{n_k} \overset{k\to\infty}{\to} 0$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+x}{e^x} = 0$ όπως εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε εφαρμόζωντας τον κανόνα de l'Hospital. Επιπλέον, αφού η f είναι συνεχής, $b_{n_k} = \frac{1}{f(a_{n_k})} \overset{k\to\infty}{\to} \frac{1}{f(0)}$.

(ii) Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}$ συγκλίνει δείχνοντας ότι είναι κάτω φραγμένη και φθίνουσα.
Για κάθε n έχουμε $x_n \geq 0$ και $x_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \leq \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{n} = x_n$.
Αφού επιπλέον η f είναι συνεχής, η $(f(x_n))$ συγκλίνει.

(iii) Θέτουμε $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Ως γνωστόν, $s_n \to e$. Η υπόθεσή μας είναι ισοδύναμη με το ότι υπάρχει γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών (n_k) τέτοια ώστε

$$|s_{n_k} - f(x_{n_k})| < \frac{n_k^{2019}}{2019^{n_k}} \ (\star)$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, όπου (x_n) η ακολουθία του (ii). Έχουμε $n_k \overset{k\to\infty}{\to} \infty$, άρα $\frac{n_k^{2019}}{2019^{n_k}} \overset{k\to\infty}{\to} 0$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{2019}}{2019^x} = 0$. Η (x_n) συγκλίνει σε ένα $x \in \mathbb{R}$ άρα και η (x_{n_k}) συγκλίνει στο x. Από την $(\star)$ παίρνουμε τότε ότι $|e - f(x)| = 0$, δηλαδή $e = f(x)$. Αυτό σημαίνει ότι $e \in f(\mathbb{R})$.

2.

(i) Έστω $\epsilon > 0$. Θέλουμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \neq 0$ με $0 < |x-1| < \delta$ να έχουμε $\left|\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} - (-1)\right| < \epsilon$. Έχουμε $\left|\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} + 1\right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{|x-1|}{|x|} < \epsilon$. Έστω ένα $\delta < \frac{1}{2}$ (το οποίο θα το επιλέξουμε). Τότε $x > \frac{1}{2}$, άρα $\frac{|x-1|}{|x|} < \frac{|x-1|}{\frac{1}{2}} = 2|x-1|$. Αν έχουμε επιπλέον ότι $\delta < \frac{\epsilon}{2}$ τότε $2|x-1| < 2\delta < \epsilon$. Επιλέγουμε λοιπόν $\delta = \frac{1}{2}\min\{\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2}\}$.

(ii) Από την υπόθεση έπεται ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) ανά δύο διαφορετικών όρων ώστε $f(a_n) = 0$. Αυτή η ακολουθία γνωρίζουμε ότι έχει γνήσια μονότονη υπακολουθία. Ας υποθέσουμε ότι έχει γνήσια αύξουσα υπακολουθία, έστω την (a_{n_k}). Η f' είναι παραγωγίσιμη σε κάθε διάστημα, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Rolle. Για κάθε k, εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle στο διάστημα $[a_{n_k}, a_{n_{k+1}}]$ και παίρνουμε $\xi_k \in (a_{n_k}, a_{n_{k+1}})$ ώστε $f''(\xi_k) = 0$. Τα ξ_k είναι διαφορετικά ανά δύο διότι τα διαστήματα $(a_{n_k}, a_{n_{k+1}})$ είναι ανά δύο ξένα. Άρα η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει άπειρες ρίζες.

3.

(i) Έστω $x > 1$. Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ στο διάστημα $[1, x]$ και παίρνουμε $\xi \in (1, x)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$. Τότε $\frac{f(x)}{x} > 1 + \frac{c}{x}$, όπου $c = f(1) - 1$, αφού $f'(\xi) > 1$. Αφου $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{c}{x} = 0$, υπάρχει $N > 0$ ώστε $\frac{c}{x} > -\frac{1}{2}$ για κάθε $x > N$. Επιλέγουμε $x_0 = \max\{3, N\} > 2$ οπότε για κάθε $x > x_0$ έχουμε $\frac{f(x)}{x} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

(ii) Για την πρώτη σειρά, αν $n \geq [x_0]+1$ τότε $n > x$ και άρα $f(n) > \frac{n}{2}$. Άρα $a_n = \frac{1}{f(n)(\log(n+1))^2} < \frac{2}{n(\log(n+1))^2} = b_n$ για κάθε $n \geq [x_0]+1$. Η ακολουθία $c_n = \frac{2}{n(\log n)^2}$ είναι φθίνουσα και συγκλίνει στο 0 άρα, από το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy, η $\sum_{n=[x_0]+1}^{\infty} c_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=[x_0]+1}^{\infty} 2^n c_{2^n} = \sum_{n=[x_0]+1}^{\infty} \frac{2}{\log 2 \cdot n^2}$ συγκλίνει. Όμως η τελευταία σειρά συγκλίνει (είναι της μορφής $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ με $p > 1$). Επιπλέον έχουμε $\frac{c_n}{b_n} = \left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^2 \to 1$ όπως μπορούμε να δούμε από τον κανόνα de l'Hospital ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log(x+1)}{\log x} = 1$. Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum_{n=[x_0]+1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει. Τέλος, αφού $0 \leq a_n < b_n$, η $\sum_{n=[x_0]+1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης.

Για την δεύτερη σειρά, η ακολουθία $x_n = \frac{1}{f(n)}$ είναι φθίνουσα αφού η f είναι αύξουσα (με θετική παράγωγο) και $0 \leq x_n < \frac{2}{n}$ για κάθε $n \geq [x_0]+1$, και $x_n \to 0$. Από το κριτήριο του Leibniz, η σειρά $\sum_{n=[x_0]+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{f(n)}$ συγκλίνει.

Για την τρίτη σειρά, για $x > x_0 > 2$ έχουμε $f(x) > \frac{x}{2} > 1$. Οπότε $\sqrt[n]{\frac{n^2}{f(x)^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{f(x)} \to \frac{1}{f(x)} < 1$. Από το κριτήριο ρίζας, η $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{f(x)^n}$ συγκλίνει.

4.

(i) Αφού η f είναι φραγμένη συνάρτηση, το σύνολο $f(A)$ είναι φραγμένο και μη κενό. Άρα το $\inf f(A)$ είναι πραγματικός αριθμός. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει ακολουθία (y_n) στοιχείων του $f(A)$ ώστε $y_n \to \inf f(A)$. Για κάθε n υπάρχει $x_n \in A$ ώστε $f(x_n) = y_n$. Άρα $f(x_n) = y_n \to \inf f(A)$.

(ii) Η απάντηση είναι ΝΑΙ. Θα αποδείξουμε το γενικότερο αποτέλεσμα $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$. Έστω $c \in A+B$. Υπάρχουν $a \in A$, $b \in B$ ώστε $c = a+b$. Τα $\sup A$, $\sup B$ είναι άνω φράγματα των A, B αντίστοιχα. Άρα $a \leq \sup A$ και $b \leq \sup B$, άρα $c = a+b \leq \sup A + \sup B$. Άρα το $\sup A + \sup B$ είναι άνω φράγμα του $A+B$. Στην συνέχεια θεωρούμε $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ τέτοια ώστε $a + \frac{\epsilon}{2} > \sup A$ και $b + \frac{\epsilon}{2} > \sup B$. Τότε $a+b \in A+B$ και $(a+b)+\epsilon > \sup A + \sup B$. Επομένως $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

(iii) Έχουμε $x_{2n} = \frac{3}{4n}$ και $x_{2n-1} = -\frac{1}{4n-2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η (x_{2n}) είναι φθίνουσα και μη αρνητική και η (x_{2n-1}) αύξουσα και μη θετική. Άρα $\sup A = x_2 = \frac{3}{4}$ και $\inf A = x_1 = -\frac{1}{2}$. Επίσης $x_{2n} \to 0$ και $x_{2n-1} \to 0$ άρα $x_n \to 0$, και $\limsup x_n = \liminf x_n = 0$.
Δείχνουμε γενικά ότι $\sup(-A) = -\inf A$, όπου $-A = \{-a : a \in A\}$. Παρόμοια δείχνεται ότι $\inf(-A) = -\sup A$. Για τυχαίο $b \in -A$ έχουμε $-b \in A$, άρα $-b \geq \inf A$, άρα $b \leq -\inf A$. Επίσης για $\epsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $a - \epsilon < \inf A$, άρα $-a+\epsilon > -\inf A$ με $-a \in -A$. Επομένως $\sup(-A) = -\inf A$.
Άρα από την προηγούμενη ιδιότητα παίρνουμε $\sup f(A) = \sup(-A) = -\inf A = \frac{1}{2}$ και $\inf f(A) = \inf(-A) = -\sup A = -\frac{3}{4}$. Επίσης $f(x_n) = -x_n \to 0$ άρα $\liminf f(x_n) = \limsup f(x_n) = 0$.