**Πανεπιστήμιο Κρήτης - Ιανουάριος 2019**

# Ανάλυση Ι

**1.**
Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και άνω φραγμένο σύνολο. Αποδείξτε ότι $\sup(A+A) = \sup A$, όπου $A + A = \{a + b : a, b \in A\}$. Υπολογίστε τα $\sup, \inf, \limsup, \liminf$ της ακολουθίας $(a_n)$ με $a_n = (1+\frac{1}{n})^{2n}$ αν $n$ άρτιο και $a_n = \frac{en}{[en]}$ αν $n$ περιττό.

**2.**
Έστω $(x_n)$ ακολουθία θετικών αριθμών ώστε $\lim x_n = 0$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + \frac{1}{n})^n$ συγκλίνει ενώ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ δεν συγκλίνει κατ' ανάγκη. Τέλος, δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία $(x_{n_k})$ της $(x_n)$ ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_{n_k}$ να συγκλίνει.

**3.**
Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^{1/n}-1)^{n!}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n2^n}{2^n+3^n}, \sum_{n=1}^{\infty}(1+(-1)^n)\frac{1}{\sqrt{n}}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+2)!}$$

**4.**
Δείξτε ότι η συνάτρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο 1 κάνοντας χρήση του ορισμού της συνέχειας. Δίνονται πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ με $a_0a_n < 0$ και συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε $p(g(x)) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η $g$ είναι σταθερή συνάρτηση.

**5.**
Δίνονται $a \in \mathbb{R}$ και $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $(a, +\infty)$ ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Ισχύει το αντίστροφο; Έστω $h, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} h \circ g(x) = l$.

**6.**
Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f'(x) - 2x > 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}$ συγκλίνει. Δώστε παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης.

# Λύσεις

**1.**
Έστω $a+b \in A+A$ τυχαίο. Τότε $a, b \leq \sup A$ άρα $a+b \leq 2\sup A$. Επίσης, υπάρχει ακολουθία $(a_n)$ στοιχείων του $A$ ώστε $a_n \to \sup A$. Άρα $a_n + a_n \in A+A$ και $a_n + a_n \to 2\sup A$. Επομένως $\sup(A+A) = 2\sup A$.

Για τα $\sup, \inf$ της ακολουθίας θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ και $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$. Άρα βρίσκουμε τα $\sup, \inf$ των υπακολουθιών και παίρνουμε το μέγιστο και το ελάχιστο, αντίστοιχα. Ως γνωστόν, η ακολουθία $x_n = (1+1/n)^n$ είναι γνησίως αύξουσα και συγκλίνει στο $e$. Άρα για $n$ άρτιο, τα $\sup, \inf$ της $(a_n)$ είναι $(\frac{3}{2})^4$, $e^2$, αντίστοιχα. Επίσης η ακολουθία $y_n = \frac{en}{[en]}$ είναι φθίνουσα και συγκλίνει στο 1. Άρα για $n$ περιττό, τα $\sup, \inf$ της $(a_n)$ είναι $\frac{e}{[e]}$, 1 αντίστοιχα. Επομένως τα $\sup, \inf$ της $(a_n)$ είναι $(3/2)^4$, 1 αντίστοιχα.

**2.**
Αφού $x_n \to 0$ και $1/n \to 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $0 \leq x_n < 1/3$ και $1/n < 1/3$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε $0 \leq \left(x_n + \frac{1}{n}\right)^n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$ για κάθε $n \geq n_0$. Η σειρά $\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ συγκλίνει άρα και η σειρά $\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(x_n + \frac{1}{n}\right)^n$ συγκλίνει. Επομένως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n + \frac{1}{n}\right)^n$ συγκλίνει.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ μπορεί να μην συγκλίνει. Π.χ. η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει.

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, θεωρούμε τον θετικό αριθμό $\epsilon_k = \frac{1}{k^2}$. Αφού $0 \leq x_n \to 0$, υπάρχει $n_1$ ώστε $x_{n_1} < \epsilon_1$. Επίσης υπάρχει $n_0$ ώστε $x_n < \epsilon_2$ για κάθε $n \geq n_0$. Επιλέγουμε ένα $n_2$ ώστε $n_1 < n_2$ και $n_2 \geq n_0$. Όμοια, υπάρχει $n_0'$ ώστε $x_n < \epsilon_3$ για κάθε $n \geq n_0'$. Επιλέγουμε ένα $n_3$ ώστε $n_2 < n_3$ και $n_3 \geq n_0'$. Συνεχίζοντας έτσι, υπάρχει γνήσια αύξουσα ακολουθία $(n_k)$ φυσικών αριθμών ώστε $0 \leq x_{n_k} < \epsilon_k$. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k$ συγκλίνει άρα και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει.

**3.**
Για την πρώτη σειρά, γνωρίζουμε ότι $n^{1/n} \to 1$, άρα υπάρχει $n_0$ ώστε $|n^{1/n} - 1| < 2/3$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε $|n^{1/n} - 1|^{n!} < (2/3)^{n!}$ για κάθε $n \geq n_0$. Έχουμε

$$\sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^{n!}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{(n-1)!} \to 0.$$

Άρα από το κριτήριο ρίζας η σειρά $\sum_{n=n_0}^{\infty} (2/3)^{n!}$ συγκλίνει. Άρα συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{1/n} - 1)^{n!}$, και μάλιστα απόλυτα.

Για την δεύτερη σειρά, θέτουμε $a_n = \frac{1+n2^n}{2^n+3^n}$. Τότε $a_n = n\left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{\frac{1}{n2^n}+1}{(\frac{2}{3})^n+1}$ με $\frac{\frac{1}{n2^n}+1}{(\frac{2}{3})^n+1} \to 1$. Επομέμως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, όπου $b_n = n\left(\frac{2}{3}\right)^n$, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης. Έχουμε $\sqrt[n]{b_n} = \frac{2}{3}\sqrt[n]{n} \to \frac{2}{3} < 1$. Επομένως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει από το κριτήριο ρίζας.

Για την τρίτη σειρά, θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_k = \sum_{n=1}^{k} (1+(-1)^n)\frac{1}{\sqrt{n}}$. Αν $k = 2m$ άρτιο, τότε $s_k = \frac{2}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{m}})$. Επομένως η υπακολουθία των άρτιων δεικτών της $(s_k)$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει. Η τλευταία σειρά δεν συγκλίνει, άρα η ακολουθία $(s_k)$ δεν συγκλίνει.

Για την τέταρτη σειρά, θέτουμε $c_n = \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Έχουμε $\frac{c_n}{n^2} \to 1$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ συγκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης.

**4.**
Έστω $\epsilon > 0$. Αναζητούμε $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x$ με $|x-1| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - 2| < \epsilon$. Έστω λοιπόν τυχαίο $0 < \delta < 1$ (το οποίο θα επιλεγεί) και $x$ ώστε $|x-1| < \delta$ ( άρα $x > 0$). Τότε $|f(x) - 2| = |(x-1) + (\frac{1}{x} - 1)| \leq |x-1| + |\frac{1}{x} - 1| < \delta + \frac{|x-1|}{|x|} < \delta + \frac{\delta}{x}$ (1). Έχουμε $x > 1 - \delta$ άρα (1)$< \delta + \frac{\delta}{1-\delta}$ (2). Θέλουμε $\delta < 1/2$ ώστε $\frac{1}{1-\delta} < 2$, άρα (2) $< 3\delta$. Άρα θέλουμε επίσης $3\delta < \epsilon$. Επιλέγουμε λοιπόν $\delta = \frac{1}{2}\min\{\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{3}\}$.

Έστω ότι η $g$ δεν είναι σταθερή συνάρτηση. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $g(x_1) \neq g(x_2)$. Αφού η $g$ συνεχής, το σύνολο τιμών της περιέχει το μη τετριμένο διάστημα $I$ με άκρα τα $g(x_1), g(x_2)$. Από υπόθεση, $p(I) = \{0\}$. Επομένως το $p$ είναι ένα πολυώνυμο με άπειρς ρίζες. Έπεται ότι είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Αυτό αντιφάσκει στην υπόθεση ότι $a_0 a_n < 0$.

**5.**
Αφού $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$, υπάρχει $N > 0$, $N > a$ ώστε $f'(x) > 1$ για κάθε $x > N$. Έστω $x > N$. Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ στο διάστημα $[x, N]$ και παίρνουμε $\xi \in (x, N)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(N)}{x - N}$. Τότε $f(x) > x - N + f(N)$. Άρα $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
Το αντίστροφο δεν ισχύει. Αντιπαράδειγμα είναι η $f(x) = x$.

Έστω $\epsilon > 0$. Αφού $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$, υπάρχει $M > 0$ ώστε για κάθε $x > M$ να ισχύει $|h(x) - l| < \epsilon$. Αφού $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, υπάρχει $N > 0$ ώστε για κάθε $x > N$ να ισχύει $g(x) > M$. Άρα $|h(g(x)) - l| < \epsilon$ για κάθε $x > N$. Επομένως $\lim\limits_{x \to +\infty} h(g(x)) = l$.

**6.**
Έστω $x > 0$. Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ στο διάστημα $[0, x]$ και παίρνουμε $\xi \in (0, x)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x)}{x}$. Άρα $f(x) = xf'(\xi) > x \cdot 2\xi > 0$. Εφαρμόζωντας επίσης το ΘΜΤ στο διάστημα $[0, x]$ για την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^2$, παίρνουμε $f(x) > x^2$. Επομένως $0 \leq \frac{1}{f(n)} \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ συγκλίνει αφού συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
Ένα παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης η $f(x) = x^3$.