Πανεπιστήμιο Κρήτης - Σεπτέμβριος 2014

Συναρτησιακή Ανάλυση

1.
Δώστε παράδειγμα (με σύντομη επεξήγηση)
(i) Μη διαχωρίσιμου χώρου Banach.
(ii) Χώρου με νόρμα που δεν είναι χώρος Banach.
(iii) Μη φραγμένου γραμμικού τελεστή $T : c_{00} \to c_{00}$.

2.
Έστω $T : (C([0,1]), \|\cdot\|) \to (C([0,1]), \|\cdot\|)$ τελεστής με τύπο

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(y)dy, \ x \in [0,1].$$

(i) Δείξτε ότι ο T είναι 1-1 αλλά όχι επί.

(ii) Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και υπολογίστε την νόρμα του.

3.
Έστω X χώρος Banach και (x_n) ακολουθία γραμμικά ανεξάρτητων στοιχείων του X. Ορίζουμε τους υποχώρους $V_n = span\{x_1, ..., x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ και $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$.

(i) Είναι οι χώροι V_n πάντα κλειστοί;

(ii) Δείξτε ότι ο υπόχωρος V δεν είναι ποτέ κλειστός.

4.
Έστω V χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

(i) Αν $v, w \in V$ με $v \neq w$ δείξτε ότι

$$\left\| \frac{v+w}{2} \right\| < \frac{\|v\| + \|w\|}{2}.$$

(ii) Δείξτε ότι κάθε κυρτό υποσύνολο του V έχει το πολύ ένα στοιχείο με ελάχιστη νόρμα.

5.
Έστω (e_n) ορθοκανονική ακολουθία σε χώρο Hilbert H και (a_n) φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε τον τελεστή $T : H \to H$ με τύπο

$$Tv = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle v, e_n \rangle e_n.$$

(i) Δείξτε ότι η σειρά που ορίζει τον τελεστή T συγκλίνει σε στοιχείο του H.

(ii) Δείξτε ότι ο τελεστής T είναι φραγμένος.

6.
Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach.

(i) Έστω (x_n) ακολουθία γραμμικά ανεξάρτητων στοιχείων του X και (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x_n) = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Κάνοντας χρήση του (i) δείξτε ότι υπάρχει μη φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $f : X \to \mathbb{R}$.