

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

1.

Αποδείξτε ότι το πρόβλημα

$$\frac{dy}{dx} = -2\operatorname{sign}y + 1, \quad y(x_0) = 0$$

δεν έχει λύση για $x > x_0$. Εδώ

$$\operatorname{sign}y = \begin{cases} 1 & \text{αν } y > 0 \\ 0 & \text{αν } y = 0 \\ -1 & \text{αν } y < 0 \end{cases}$$

Εξετάστε εάν επαληθεύονται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Peano και του Θεωρήματος Picard.

2.

Έστω $x(t)$ και $y(t)$ λύσεις των εξισώσεων

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}x^2 + \cos x, \quad \frac{dy}{dt} = e^y + |\sin y|$$

αντίστοιχα, στο διάστημα $(0, \epsilon)$, όπου $\epsilon > 0$. Προσδιορίστε το πρόσημο της συνάρτησης $z(t) = x(t) - y(t)$ στο $(0, \epsilon)$, αν $x(0) = y(0) = 0$.

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

3.

Προσδιορίστε την λύση $(x(t), y(t))$ του προβλήματος Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x - y + 2, \quad x(0) = 0 \\ \frac{dy}{dt} &= 3x - 2y + 2 \sin t, \quad y(0) = -7 \end{aligned}$$

Η λύση που βρήκατε είναι μοναδική; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.