

## Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

1.

Έστω ότι η συνάρτηση  $y(x)$  είναι λύση του προβλήματος Cauchy

$$y' = y^2 + \sin^2(xy) + x^3, \quad y(0) = y_0 > 1$$

α) Αποδείξτε ότι υπάρχει  $x^* \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε  $\lim_{x \rightarrow x^*} y(x) = +\infty$ .

β) Αποδείξτε ότι για  $x \leq 0$  ισχύει  $0 < y(x) \leq \frac{x^4}{4} + y_0$ .

2.

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + \sin y - \sin t, & x(0) &= 1 \\ \frac{dy}{dt} &= x + y, & y(0) &= 0 \end{aligned}$$

Κατασκευάστε την πρώτη και την δεύτερη προσέγγιση της λύσης παίρνοντας ως μηδενική την  $\vec{\phi}_0 \equiv (1, 0)$ .

3.

Εξετάστε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας για το σύστημα

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2 - 2 \cos x + \sin y - x \\ \frac{dy}{dt} &= 1 - xe^x - e^y \end{aligned}$$

4.

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$y'' + 4y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(\gamma\pi) = 0$$

με  $\gamma > 0$  και  $f(x)$  τυχαία ομαλή συνάρτηση.

α) Για ποιες τιμές της παραμέτρου  $\gamma$  το πρόβλημα αυτό έχει πάντα μοναδική λύση;

β) Για ποιες  $f(x)$  η λύση θα υπάρχει για τυχαίο  $\gamma > 0$ ;