Πανεπιστήμιο Κρήτης - Ιανουάριος 2020

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

1.
Έστω ότι η συνάρτηση $y(x)$ είναι λύση του προβλήματος Cauchy

$$y' = y^2 + \sin^2(xy) + x^3,\ y(0) = y_0 > 1$$

α) Αποδείξτε ότι υπάρχει $x^* \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\lim\limits_{x\to x^*} y(x) = +\infty$.

β) Αποδείξτε ότι για $x \leq 0$ ισχύει $0 < y(x) \leq \frac{x^4}{4} + y_0$.

2.
Θεωρούμε το εξής πρόβλημα Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + \sin y - \sin t, && x(0) = 1 \\ \frac{dy}{dt} &= x + y, && y(0) = 0 \end{aligned}$$

Κατασκευάστε την πρώτη και την δεύτερη προσέγγιση της λύσης παίρνοντας ως μηδενική την $\bar{\phi}_0 \equiv (1,0)$.

3.
Εξετάστε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας για το σύστημα

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2 - 2\cos x + \sin y - x \\ \frac{dy}{dt} &= 1 - xe^x - e^y \end{aligned}$$

4.
Θεωρούμε το εξής πρόβλημα

$$y'' + 4y = f(x),\ y(0) = 0,\ y(\gamma\pi) = 0$$

με $\gamma > 0$ και $f(x)$ τυχαία ομαλή συνάρτηση.

α) Για ποιες τιμές της παραμέτρου γ το πρόβλημα αυτό έχει πάντα μοναδική λύση;

β) Για ποιες $f(x)$ η λύση θα υπάρχει για τυχαίο $\gamma > 0$;

Λύσεις

1.

α) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y) = y^2 + \sin^2(xy) + x^3$. Αφού το x^* που αναζητούμε είναι θετικό, μπορούμε να περιοριστούμε για $x \geq 0$. Τότε θα έχουμε $f(x,y) \geq y^2 \overset{\text{ορσ.}}{=} g(x,y)$. Λύνουμε λοιπόν το πρόβλημα $y' = g(x,y)$, $y(0) = y_0$ με την μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών:

$y' = y^2 \Leftrightarrow \frac{y'}{y^2} = 1 \Rightarrow \int_0^x \frac{y'(t)}{y^2(t)}dt = \int_0^x 1dt \overset{y(t)=u}{\Leftrightarrow} \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{u^2}du = x \Leftrightarrow -\frac{1}{u}|_{y_0}^{y(x)} = x \Leftrightarrow \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y(x)} = x \Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{\frac{1}{y_0}-x}$.

Επομένως, από το Θεώρημα Σύγκρισης, παίρνουμε $y(x) \geq \frac{1}{\frac{1}{y_0}-x}$ για τα x για τα οποία υπάρχει η λύση y του προβλήματος $y' = f(x,y)$, $y(0) = y_0$. Έχουμε $\lim\limits_{x\to\frac{1}{y_0}^-} \frac{1}{\frac{1}{y_0}-x} = +\infty$ και $\frac{1}{y_0} < 1$, άρα υπάρχει x^* με $0 < x^* \leq \frac{1}{y_0} < 1$ ώστε $\lim\limits_{x\to x^*} y(x) = +\infty$.

β) Έχουμε $f(x,y) \geq x^3 \overset{\text{ορσ.}}{=} h(x,y)$, όπου η f ορίστηκε στο α). Το πρόβλημα $y' = g(x,y)$, $y(0) = y_0$ έχει λύση $y(x) = \frac{x^4}{4} + y_0$. Από το Θεώρημα Σύγκρισης, $y(x) \leq \frac{x^4}{4} + y_0$ για τα $x \leq 0$ για τα οποία υπάρχει η y.

Για την ανισότητα $y(x) > 0$ για $x \leq 0$, παρατηρούμε αρχικά ότι $y(0) > 0$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $x' < 0$ ώστε $y(x') = 0$. Αφού η y είναι συνεχής, υπάρχει $x_0 < 0$ ώστε $y(x_0) = 0$ και $y(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_0, 0)$. Πράγματι, το x_0 δίνεται από την σχέση $x_0 = \inf\{x : y(x) > 0\}$. Τότε, η y είναι παραγωγίσιμη στο x_0, και

$0 > x_0^3 = y'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, αντίφαση. Αφού η y συνεχής, $y(x) > 0$ για κάθε $x \leq 0$.

2.

Υπολογίζουμε

$\phi_{1,1}(t) = 1+\int_0^t \phi_{0,1}(s)+\sin\phi_{0,2}(s)-\sin s ds = 1+\int_0^t 1+\sin 0-\sin s ds = 1+(s+\cos s)|_0^t = t+\cos t$.

$\phi_{1,2}(t) = 0 + \int_0^t \phi_{0,1}(s) + \phi_{0,2}(s)ds = \int_0^t 1 + 0ds = t$.

$\phi_{2,1}(t) = 1 + \int_0^t s + \cos s + \sin s - \sin s ds = 1 + (\frac{s^2}{2} + \sin s)|_0^t = 1 + \frac{t^2}{2} + \sin t$.

$\phi_{2,2}(t) = 0 + \int_0^t s + \cos s + s ds = (s^2 + \sin s)|_0^t = t^2 + \sin t$.

3.

Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της γραμμικοποίησης. Θεωρούμε λοιπόν την απεικόνιση $F(x,y) = (2 - 2\cos x + \sin y - x, 1 - xe^x - e^y)$ και υπολογίζουμε την Ιακωβιανή της:

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 2\sin x - 1 & -(x+1)e^x \\ \cos y & -e^y \end{pmatrix}$$

Το σημείο ισορροπίας είναι το (0,0), άρα $JF(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Θεωρούμε λοιπόν το γραμμικό σύστημα με πίνακα συντελεστών τον $A = JF(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\mathcal{X}(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda+1)^2 + 1$ με ρίζες $-1 \pm i$. Το πραγματικό τους μέρος είναι αρνητικό, άρα η μέθοδος της γραμμικοποίησης δίνει απάντηση: το (0,0) είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

4.

Ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε την συνάρτηση Green $G(t,x)$. Βρίσκουμε αρχικά την γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης $y'' + 4y = 0$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο αυτής είναι το $\mathcal{X}(\lambda) = \lambda^2 + 4$ το οποίο έχει ρίζες $\pm 2i$. Έχουμε $e^{2ix} = \cos 2x + i \sin 2x$. Γενική λύση λοιπόν η $y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$.

α) Για να έχει το ΠΣΤ λύση για τυχαία f πρέπει και αρκεί να υπάρχει η συνάρτηση Green. Για να υπάρχει η συνάρτηση Green πρέπει και αρκεί να υπάρχουν γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις y_1, y_2 του ομογενούς που να ικανοποιούν $y_1(0) = 0$ και $y_2(\gamma\pi) = 0$. Για την y_1, $0 = y_1(0) = c_1$. Επιλέγουμε λοιπόν $c_1 = 0$ και $c_2 = 1$, και $y_1(x) = \sin 2x$. Για την y_2, $0 = y_2(\gamma\pi) = c_1 \cos 2\gamma\pi + c_2 \sin 2\gamma\pi$. Οι y_1, y_2 είναι γραμμικά εξαρτημένες αν και μόνο αν $\cos 2\gamma\pi \neq 0$ και $\sin 2\gamma\pi = 0$. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $2\gamma\pi = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ δηλαδή αν και μόνο αν $\gamma = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}$, $k \in \mathbb{N}_0$, αφού $\gamma > 0$. Επομένως, το ΠΣΤ έχει λύση αν και μόνο αν $\gamma \notin \{\frac{k}{2} + \frac{1}{4} : k \in \mathbb{N}_0\}$.

β) Αν $\gamma \notin \{\frac{k}{2} + \frac{1}{4} : k \in \mathbb{N}_0\}$ η λύση υπάρχει (και είναι μοναδική) για κάθε f ενώ για $\gamma \in \{\frac{k}{2} + \frac{1}{4} : k \in \mathbb{N}_0\}$ η λύση υπάρχει αν και μόνο αν

$$\int_0^{\gamma\pi} f(x) \sin 2x dx = 0.$$

Για τυχαίο γ λοιπόν πρέπει $\int_0^{\gamma\pi} f(x) \sin 2x dx = 0$ για να έχει το πρόβλημα λύση (άπειρες λύσεις).