Πανεπιστήμιο Κρήτης - Ιανουάριος 2016

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

1.
Στο χωρίο $x^2 + y^2 \leq 4$, θεωρούμε το εξής πρόβλημα Cauchy

$$y' = \cos x - 1 - y^2, \; y(0) = 1.$$

(α) Κατασκευάστε την πρώτη διαδοχική προσέγγιση Picard της λύσης παίρνοντας ως μηδενική την $\phi_0 \equiv 1$.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει $x^* \in [-1, 1]$ τέτοιο ώστε $\lim_{x \to x^*} y(x) = \infty$.

(γ) Για ποιό $a > 0$, το Θεώρημα Picard εξασφαλίζει την ύπαρξη της λύσης στο διάστημα $(-a, a)$;

2.
Στο διάστημα (-1,1), θεωρούμε δύο ζεύγη διανυσματικών συναρτήσεων

$$a) \; (1, t), (1, -t) \text{ και } b) \; (2e^t, e^t), (e^{-t}, e^{-t}).$$

Ποιό από τα ζεύγη αυτά και γιατί μπορεί να αποτελεί θεμελιώδες σύστημα λύσεων του συστήματος διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{dx}{dt} = a_{1,1}(t)x + a_{1,2}(t)y$$
$$\frac{dy}{dt} = a_{2,1}(t)x + a_{2,2}(t)y$$

όπου $a_{i,j} \in C^0([-1, 1])$. Κατασκευάστε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων για την κατάλληλη περίπτωση.

3.
Σε ποιά από τις ακόλουθες περιπτώσεις (και γιατί) υπάρχει μοναδική λύση του ΠΣΤ για κάθε ομαλή f;

(α) $y'' + y = f(x), \; y'(0) = y'(\pi) = 0.$

(β) $y'' + y = f(x), \; y(0) = y(\pi) = 0.$

(γ) $y'' + y = f(x), \; y'(0) = y(\pi) = 0.$

4.
Εξετάστε την ευστάθεια της λύσης $\phi(t) = (1, t^2)$ του συστήματος

$$\frac{dx}{dt} = -e^t x - t^2 y + e^t + t^4$$
$$\frac{dy}{dt} = t^2 x - y + 2t.$$