

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

1.

Κατασκευάστε την πρώτη και την δεύτερη διαδοχική προσέγγιση Picard της λύσης $(x(t), y(t))$ του προβλήματος Cauchy

$$\begin{aligned}x' &= x - y + t, \quad x(0) = 1 \\y' &= x + e^y, \quad y(0) = 1\end{aligned}$$

παίρνοντας ως μηδενική προσέγγιση την $\bar{\phi}_0 \equiv (1, 0)$.

2.

Για την $y = y(x)$ θεωρούμε το εξής πρόβλημα Cauchy

$$y' = ae^y + |\sin y| + |x| + 1, \quad y(0) = 1$$

όπου $a \in \{0, 1\}$. Για ποιές τιμές του a το πρόβλημα έχει ολική λύση στο $(0, 2)$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

3.

Να βρεθεί η συνάρτηση Green και η λύση y του ΠΣΤ

$$y'' - \frac{1}{x}y' = x - \frac{1}{x}, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 2.$$

4.

Θεωρούμε το διαφορικό σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned}x' &= -t^2x - y - z \\y' &= x - e^ty + \sin tz \\z' &= x - \sin ty - z\end{aligned}$$

Εξετάστε την ευστάθεια καθώς και την ασυμπτωτική ευστάθεια του σημείου ισορροπίας.