

## Στοχαστικές Ανελιξίες

1.

Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  με χώρο καταστάσεων  $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4\}$  και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(α') Αν η αρχική κατανομή είναι  $\pi_0 = (0, 0, 1, 0)$ , υπολογίστε την πιθανότητα  $\mathbb{P}[X_3 = 2, X_2 = 4, X_1 = 1]$ .

(β') Να βρείτε τις κλάσεις επικοινωνίας της αλυσίδας και να τις χαρακτηρίσετε ως προς την επαναληπτικότητα και την παροδικότητα.

(γ') Βρείτε τις αναλλοίωτες κατανομές της αλυσίδας.

2.

Ρίχνουμε ένα ζάρι πολλές φορές. Ποιός είναι ο αναμενόμενος αριθμός ρίψεων μέχρι να έρθουν δύο διαδοχικά εξάρια;

3.

Δίνεται ένας περίπατος  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  στους ακέραιους, με  $S_0 = 0$  και  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ , όπου  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με  $\mathbb{E}[X_k] = 0$  και  $Var(X_k) = \sigma^2$ . Δείξτε ότι η διαδικασία  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  με  $M_n = S_n^2 - n\sigma^2$  είναι martingale ως προς  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ .

4.

Έστω ότι μία ραδιενεργός πηγή εκπέμπει σωματίδια  $\alpha$  και  $\beta$  οι αριθμοί των οποίων ακολουθούν τις ανεξάρτητες στοχαστικές ανελιξίες Poisson  $X(t)$  και  $Y(t)$  με παραμέτρους 5 και 4 σωματίδια ανά δευτερόλεπτο, αντίστοιχα.

(α') Ποιά είναι η πιθανότητα σε ένα δευτερόλεπτο να εκπεμφθούν συνολικά 10 σωματίδια;

(β') Αν γνωρίζουμε ότι μετά από ένα δευτερόλεπτο εκπέμφθηκαν συνολικά 10 σωματίδια, ποιά είναι η πιθανότητα 4 από αυτά να είναι τύπου  $\alpha$ ;