

## Στοχαστικές Ανελιξίες

1.

Έστω Μαρκοβιανή αλυσίδα  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  με χώρο καταστάσεων  $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

(α') Βρείτε τις κλάσεις επικοινωνίας της αλυσίδας και να τις χαρακτηρίσετε ως προς την επαναληπτικότητα και παροδικότητα.

(β') Βρείτε όλες τις αναλλοίωτες κατανομές της αλυσίδας.

(γ') Αν  $X_0 = 5$ , υπολογίστε την πιθανότητα η αλυσίδα να καταλήξει σε καθεμία από τις κλειστές κλάσεις.

(δ') Υπολογίστε το  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n = 3 | X_0 = 5]$ .

2.

Ρίχνουμε ένα ζάρι πολλές φορές. Ποιός είναι ο αναμενόμενος αριθμός ρίψεων μέχρι να έρθουν διαδοχικά 4 και 5;

3.

Έστω  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ο απλός συμμετρικός περίπατος στους ακέραιους και  $\mathcal{F}_n$  η  $\sigma$ -άλγεβρα  $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$  όπου  $Y_1, \dots, Y_n$  είναι ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με  $\mathbb{P}[Y_n = 1] = \mathbb{P}[Y_n = -1] = \frac{1}{2}$ . Δείξτε ότι η διαδικασία  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  με  $X_n = (-1)^n \cos(\pi S_n)$  είναι martingale ως προς την  $(\mathcal{F}_n)$ .

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την σχέση της  $S_n$  με την  $Y_n$  και τις ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

4.

Σωματίδια προσπίπτουν σε έναν ανιχνευτή σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson με παράμετρο  $\lambda = 2$ . Αν στα πρώτα 4 λεπτά λειτουργίας του ανιχνευτή προσέπεσαν 2 σωματίδια, ποιά είναι η πιθανότητα το 1 από αυτά να προσπέπεσε κατά τα πρώτα 2 λεπτά;