Πανεπιστήμιο Κρήτης - Σεπτέμβριος 2019

Πραγματική Ανάλυση

1.
Θέτουμε $f_n(x) = \sqrt{n}e^{-nx^2}$, $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{+\infty} f_n(x)dx.$$

Αιτιολογήστε πλήρως τα βήματα του υπολογισμού.

2.
Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Θέτουμε

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|, \ x \in \mathbb{R}.$$

(η g παίρνει την τιμή $+\infty$ στα x για τα οποία η παραπάνω σειρά αποκλίνει.)
Δείξτε ότι αν η g είναι ολοκληρώσιμη τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει για σχεδόν όλα τα x.

3.
(α) Δείξτε ότι ένα σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο αν και μόνο αν υπάρχει μία ακολουθία συμπαγών συνόλων $K_n \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ και ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ μέτρου 0 τέτοια ώστε

$$E = A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ μέτρου 0, το $f(A)$ είναι επίσης μέτρου 0. Δείξτε ότι για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο το $f(E)$ είναι επίσης μετρήσιμο.