Πανεπιστήμιο Κρήτης - Ιανουάριος 2020

Πραγματική Ανάλυση

1.
Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(r) = \mu^*(A \cap [0, r]), r > 0$ είναι συνεχής.

2.
Έστω f θετική μετρήσιμη. Δείξτε ότι υπάρχουν $a, b > 0$ με $a < b$ ώστε $\mu(\{a < f < b\}) > 0$.

3.
Έστω

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mathcal{X}_{\left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right)}.$$

Βρείτε όλες τις τιμές του $p > 0$ για τις οποίες η f^p είναι ολοκληρώσιμη.

4.
Έστω f μία μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $\mu(\{|f| > r\}) \geq \frac{1}{r^2}$ για κάθε $r > 0$. Δείξτε ότι $\int |f| = +\infty$.

5.
Υπολογίστε τα όρια:

1)

$$\lim_{n\to\infty} \int f^n$$

όπου $f : \mathbb{R} \to [0, 1)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

2)

$$\lim_{n\to\infty} n \int \frac{\sin x}{1 + (nx)^2} dx$$

Λύσεις

1.

Γνωρίζουμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε μονότονη ακολουθία (x_n) στο πεδίο ορισμού της f τέτοια ώστε $x_n \to x_0$ ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$.
Έστω λοιπόν $r > 0$ και (r_n) αύξουσα ακολουθία τέτοια ώστε $r_n \to r$. Θεωρούμε την ακολουθία συνόλων $A_n = A \cap [0, r_n]$. Τότε αυτή είναι αύξουσα. Πράγματι, αν $x \in A_n$ τότε $x \in A$ και $0 \leq x \leq r_n$ και $r_n \leq r_{n+1}$ αφού η (r_n) αύξουσα. Άρα $x \in A_{n+1}$. Από την συνέχεια του εξωτερικού μέτρου, $\mu^*(A_n) \to \mu^*(A)$. Δηλαδή $f(r_n) \to f(r)$. Όμοια αποδεικνύεται και στην περίπτωση όπου η (r_n) είναι φθίνουσα.

2.

Θα το αποδείξουμε με άτοπο. Έστω λοιπόν ότι για κάθε $a, b > 0$ με $a < b$ ισχύει $\mu(\{a < f < b\}) = 0$. Θεωρούμε την αριθμίσιμη οικογένεια μετρήσιμων συνόλων $A_n = \{-n < f < n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε ότι $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}$ υποθέτοντας ότι η f παίρνει μόνο πραγματικές τιμές. Πράγματι, έστω $x \in \mathbb{R}$. Αφού $f(x) \in \mathbb{R}$, υπάρχει n αρκετά μεγάλο ώστε $-n < f(x) < n$. Δηλαδή $x \in A_n$. Άρα $\mathbb{R} \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, και έχουμε το ζητούμενο αφού η αντίστροφη ανισότητα είναι προφανής. Από την υπόθεσή μας παίρνουμε $\mu(A_n) = 0$, άρα $\mu(\mathbb{R}) = \mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$, από την σ-υποπροσθετικότητα του μέτρου.

3.

Η f είναι μη αρνητική, άρα το ολοκλήρωμα $\int f^p$ ορίζεται καλά και μπορεί να πάρει την τιμή $+\infty$. Αφού τα σύνολα $(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n})$ είναι ξένα ανά δύο, παίρνουμε $f^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{np}} \mathcal{X}_{(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n})}$. Επομένως, $\int f^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{np}} (\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{np}} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(p+1)}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p+1}}\right)^n$. Η τελευταία σειρά συγκλίνει για όλες τις τιμές του $p > 0$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη για κάθε $p > 0$.

4.

Θα αποδείξουμε τις ανισότητες

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(|f| > n) \leq \int |f| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(|f| > n).$$

Θεωρούμε τα μετρήσιμα σύνολα $A_n = \{n < |f| \leq n + 1\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Αυτά είναι προφανώς ξένα ανά δύο και $\{|f| > n\} = \cup_{k=n}^{\infty} A_k$. Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(|f| > n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mu(A_k) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mu(A_n)$. Επίσης παίρνουμε $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(|f| > n) = \mu(|f| > 0) + \sum_{n=1}^{\infty} n\mu(A_n) = \mu(A_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} n\mu(A_n) = \mu(A_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (n + 1)\mu(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)\mu(A_n)$.

Παίρνουμε λοιπόν $\int_{\mathbb{R}} |f| = \int_{\{|f|>0\}} |f| = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} |f| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} (n+1) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\mu(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(|f| > n)$ και $\int_{\mathbb{R}} |f| = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} |f| \geq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} n = \sum_{n=0}^{\infty} n\mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(|f| > n)$.

Επομένως, αν $\mu(|f| > r) \geq \frac{1}{r}$ για κάθε $r > 0$ τότε $\int |f| = +\infty$ και αν $\mu(f \neq 0) < +\infty$ και $\mu(|f| > r) \leq \frac{1}{r^2}$ για κάθε $r > 0$ τότε $\int |f| < +\infty$.

5.

1) Αφού $0 \leq f(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $f(x)^n < f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x)^n \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Αν ορίσουμε λοιπόν την ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n = f^n$, έχουμε $|f_n| < |f|$ στο $\mathbb{R}$ και $f_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης παίρνουμε $\int f_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

2) Ορίζουμε την ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n(x) = \frac{n \sin x}{1+(nx)^2} = \frac{\sin x}{\frac{1}{n}+nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$ και την ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g(x) = \frac{\sin x}{x^2}$, $x \neq 0$. Η g είναι ολοκληρώσιμη διότι $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Τότε για κάθε $x \neq 0$ έχουμε $|f_n(x)| \leq \frac{|\sin x|}{0+1\cdot x^2} = |g(x)|$ και $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης παίρνουμε

$$\lim_{n\to\infty} n \int \frac{\sin x}{1+(nx)^2} dx = 0.$$