Πανεπιστήμιο Κρήτης - Ιανουάριος 2020

Πραγματική Ανάλυση

1.
Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(r) = \mu^*(A \cap [0, r]), r > 0$ είναι συνεχής.

2.
Έστω f θετική μετρήσιμη. Δείξτε ότι υπάρχουν $a, b > 0$ με $a < b$ ώστε $\mu(\{a < f < b\}) > 0$.

3.
Έστω

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mathcal{X}_{\left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right)}.$$

Βρείτε όλες τις τιμές του $p > 0$ για τις οποίες η f^p είναι ολοκληρώσιμη.

4.
Έστω f μία μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $\mu(\{|f| > r\}) \geq \frac{1}{r^2}$ για κάθε $r > 0$. Δείξτε ότι $\int |f| = +\infty$.

5.
Υπολογίστε τα όρια:

1)

$$\lim_{n\to\infty} \int f^n$$

όπου $f : \mathbb{R} \to [0, 1)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

2)

$$\lim_{n\to\infty} n \int \frac{\sin x}{1 + (nx)^2} dx$$