Πανεπιστήμιο Κρήτης - Ιανουάριος 2019

Πραγματική Ανάλυση

Όλες οι συναρτήσεις f παρακάτω είναι $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1.
Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα μετρήσιμο σύνολο τέτοιο ώστε $\mu(A \cap I) = 0$ για κάθε φραγμένο διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\mu(A) = 0$.

2.
Αν η f είναι συνεχής και $f = 0$ σχεδόν παντού, δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3.
Αν η f είναι μετρήσιμη και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι υπάρχει $c > 0$ και συμπαγές σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\mu(K) > 0$ και $f(x) > c$ για κάθε $x \in K$.

4.
Αν

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \mathcal{X}_{\left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right)},$$

υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int f^2$.

5.
Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} n \int \left(\frac{n^2 x^2}{1 + n^2 x^2} \right)^n e^{-n^2 x^2} dx.$$

6.
Έστω f, f_n θετικές και ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \to f$ κατά σημείο και $\int f_n \to \int f$. Χρησιμοποιήστε το Λήμμα Fatou για την ακολουθία $f + f_n - |f - f_n|$ για να δείξετε ότι $\int |f_n - f| \to 0$.

7.
Αν η f είναι μετρήσιμη και

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\mu(\{n < |f| \leq n + 1\}) = +\infty,$$

δείξτε ότι $\int |f| = +\infty$.

8.
Αν το K είναι συμπαγές, δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν ανοικτά διαστήματα $I_1, ..., I_n$ τέτοια ώστε

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} I_k \text{ και } \sum_{k=1}^{n} \mu(I_k) < \mu(K) + \epsilon.$$