

Παραμετρική Στατιστική

1.

Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα 8 φαινομενικά όμοια κέρματα. Τα κέρματα όμως στην πραγματικότητα ανήκουν σε 2 ομάδες, τα 5 είναι αμερόληπτα ενώ τα υπόλοιπα έχουν πιθανότητα εμφάνισης κορώνας 5/8. Πραγματοποιούμε μία ρίψη και αφού δούμε το αποτέλεσμα μας δίνονται οι επιλογές

- α) Να ισχυριστούμε ότι επιλέξαμε αμερόληπτο νόμισμα.
- β) Να ισχυριστούμε ότι επιλέξαμε ένα από τα μη αμερόληπτα νομίσματα.
- γ) Να μην ανακοινώσουμε κάποια εκτίμηση για το κέρμα.

Αν κάνουμε λάθος εκτίμηση θα πρέπει να πληρώσουμε (σε κάποιον που γνωρίζει τον τύπο του κέρματος) 15 ευρώ ενώ σε ενδεχόμενο σωστής εκτίμησης 0 ευρώ. Εάν δεν απαντήσουμε θα πρέπει να πληρώσουμε 6.5 ευρώ. Περιγράψτε την παραπάνω διαδικασία σύμφωνα με την θεωρία αποφάσεων και δώστε την συνάρτηση απόφασης Bayes.

2.

Έστω $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \text{Exp}(\theta)$. Για την στατιστική κατανομή της θ η εκ των προτέρων πεποίθησή μας περιγράφεται από την $\text{Gamma}(a, 1)$ όπου a θετική παράμετρος.

- (i) Βρείτε την περιθωριακή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για κάθε X_j . (Δίνεται ότι $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$)
- (ii) Βρείτε την εκτιμήτρια Bayes του θ θεωρώντας την τετραγωνική συνάρτηση απώλειας.
- (iii) Για μία μοναδική παρατήρηση ($n = 1$), βρείτε την εμπειρική εκτιμήτρια Bayes του θ εκτιμώντας την παράμετρο a με την μέθοδο της μεγίστης πιθανοφάνειας.
(Υπόδειξη: θεωρήστε την περιθωριακή πυκνότητα πιθανότητας της X ως $f(x; a)$.)

3.

Ο χρόνος που χρειάζεται ένας ψαράς για να πιάσει το πρώτο του ψάρι για κάθε μέρα που εργάζεται ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/\theta$. Κάποιος, ο οποίος διαθέτει ανεξάρτητες παρατηρήσεις από την εν λόγω κατανομή ξεχωρίζει και μας δίνει μόνο τις παρατηρήσεις οι οποίες είναι μεγαλύτερες από $1/(2\theta)$. Έστω λοιπόν ότι εμείς λαμβάνουμε το δείγμα X_1, \dots, X_{14} .

- (i) Βρείτε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $(X_1, \dots, X_{14})^T$.
- (ii) Βρείτε μία ελάχιστα επαρκή (διανυσματική) στατιστική T για το θ .
- (iii) Βρείτε την εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας για το θ .