

Διακριτά Μαθηματικά

1.

Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Διακρινολογήστε τις απαντήσεις σας.

- i. Υπάρχει απλό γράφημα με ακολουθία βαθμών $(4,2,2,2,1,1)$.
- ii. Υπάρχει επίπεδο συνεκτικό γράφημα 15 κορυφών και 20 ακμών που έχει επίπεδη αποτύπωση με 7 όψεις.
- iii. Υπάρχει γράφημα με n κορυφές και $n - 1$ ακμές το οποίο περιέχει κύκλο.
- iv. Αν n και m είναι άρτιοι αριθμοί τότε το $K_{n,m}$ έχει κύκλο Hamilton.
- v. Ο πίνακας γειτνίασης του πλήρους γραφήματος K_n , $n \geq 2$ περιλαμβάνει μόνο 1.

2.

Δείξτε ότι ένα δέντρο με $n \geq 2$ κορυφές περιέχει σύνολο ανεξαρτησίας με μέγεθος τουλάχιστον $n/2$.

3.

Έστω G απλό επίπεδο γράφημα με n κορυφές και m ακμές. Δείξτε ότι $m \leq 3n - 6$. Στην συνέχεια δείξτε ότι η ισότητα ισχύει όταν κάθε όψη του G είναι τρίγωνο.

4.

Στους παρακάτω τύπους χ , ψ και ϕ είναι προτασιακοί τύποι. Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

- i. Αν $\phi \models \chi$ και $\chi \models \neg\psi$ τότε ο τύπος $\phi \rightarrow \chi \wedge \psi$ δεν είναι ικανοποιήσιμος.
- ii. $\phi \models \chi$ και $\chi \models \psi$ τότε ο τύπος $\phi \rightarrow \chi \wedge \psi$ είναι ταυτολογία.
- iii. $\chi \wedge \psi \models \phi \rightarrow \psi$.
- iv. $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi \models \neg\phi \rightarrow \phi$.
- v. Αν ο χ είναι ταυτολογία τότε ο $(\phi \vee \neg\phi) \rightarrow \chi$ είναι ταυτολογία.

5.

Θεωρούμε μία πρωτοβάθμια γλώσσα που περιέχει ένα κατηγορηματικό σύμβολο G . Ερμηνεύουμε την γλώσσα αυτή σε απλά, μη κατευθυνόμενα γραφήματα όπου οι μετβλητές ερμηνεύονται ως οι κορυφές των γραφημάτων και το $G(x, y)$ αληθεύει αν οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή. Στην γλώσσα αυτή να γράψετε προτάσεις που δηλώνουν:

- i. Στο γράφημα υπάρχει απομονωμένη κορυφή (δηλαδή κορυφή βαθμού 0).

ii. Κάθε κορυφή που συμμετέχει σε κύκλο μήκους 3 έχει βαθμό τουλάχιστον 3.

6.

50 φοιτητές χωρίζονται σε 10 πενταμελείς ομάδες για το εργαστήριο φυσικής. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο χωρισμός στις παρακάτω περιπτώσεις;

i. Αν κάθε ομάδα εξασκείται σε διαφορετική άσκηση.

ii. Αν όλες οι ομάδες εξασκούνται στην ίδια άσκηση.

iii. Αν 3 από τις ομάδες εξασκούνται στην ίδια άσκηση και οι υπόλοιπες 7 διαφορετικές (και μεταξύ τους και με την άσκηση των 3).

7.

Από μία τράπουλα 52 χαρτιών επιλέγουμε τυχαία 5 χαρτιά. Ποιά είναι η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον 3 άσοι στην πεντάδα μας; (Σε μια τράπουλα υπάρχουν 4 άσοι)

8.

Θεωρούμε τις ακολουθίες μήκους n με τα ψηφία 0,1,2.

i. Πόσες είναι όλες οι ακολουθίες αν δεν υπάρχει περιορισμός;

ii. Πόσες είναι όλες οι ακολουθίες που δεν περιλαμβάνουν το 0;

iii. Χρησιμοποιώντας την Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού καθώς και υποερωτήματα i. και ii. υπολογίστε πόσες είναι όλες οι ακολουθίες μήκους n οι οποίες περιλαμβάνουν τουλάχιστον μία φορά κάθε ψηφίο 0,1,2.

9.

Ένας υποψήφιος βουλευτής μοίρασε 100 διαφημιστικά φυλλάδια σε 4 εκλογικά κέντρα έτσι ώστε σε κάθε κέντρο να δοθούν τουλάχιστον 20 και το πολύ 30 φυλλάδια. Δώστε γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε την δύναμη του x ο συντελεστής της οποίας δίνει το πλήθος των διαφορετικών διανομών.