

## Γραμμική Άλγεβρα Ι

1.

Δίνονται οι διανυσματικοί χώροι  $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$  και  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  επί του σώματος  $\mathbb{R}$ . Επιπλέον, επί του  $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$  δίνεται το εσωτερικό γινόμενο  $E : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  με τύπο

$$E((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

(i) Να εξετάσετε αν το υποσύνολο  $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1x_4 = x_2x_3\} \subseteq \mathbb{R}^4$  είναι διανυσματικός υπόχωρος.

(ii) Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  με

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_3, x_2 + x_4)$$

είναι γραμμική.

(iii) Να βρεθεί μία βάση για τον πυρήνα,  $\text{Ker } f$ , της  $f$  και μία βάση για την εικόνα,  $\text{Im } f$ , της  $f$ .

(iv) Να βρεθεί μία ορθοκανονική βάση για το ορθογώνιο συμπλήρωμα του πυρήνα της  $f$ .

(v) Να βρεθεί η διάσταση του υποχώρου  $C = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ .

2. (i) Για την γραμμική απεικόνιση  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  με

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-3x_1 + 6x_2, 2x_1 + x_2, 3x_3),$$

να βρεθεί ο πίνακας  $A = {}^B_B M(f)$  της  $f$  ως προς την κανονική βάση  $B$  του  $\mathbb{R}^3$ .

(ii) Να αποδειχθεί ότι  $-A^2 + A = -21I_3 + 45A^{-1}$ .

(iii) Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα  $A$ .

(iv) Είναι ο πίνακας  $A$  όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα  $C$ ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(v) Αν  $D$  είναι ένας  $3 \times 3$  πίνακας, όμοιος με τον  $A$ , τότε να εξετασθεί αν ο  $D$  είναι διαγωνοποιήσιμος. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.