**Πανεπιστήμιο Πατρών - Φεβρουάριος 2017**

# Γενική Τοπολογία

**ΟΜΑΔΑ Α**

**1.**
(α) Ποιές μετρικές λέγονται ισοδύναμες;

(β) Έστω $\rho_1, \rho_2$ ισοδύναμες μετρικές στον χώρο $X$. Χαρακτηρίστε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τους παρακάτω ισχυρισμούς
(i) Μία ακολουθία $(x_n)$ στον $X$ συγκλίνει ως προς την $\rho_1$ αν και μόνο αν συγκλίνει ως προς την $\rho_2$.
(ii) Μπορεί μια ακολουθία να είναι $\rho_1$-Cauchy και να μην είναι $\rho_2$-Cauchy.
(iii) Ο χώρος $(X, \rho_1)$ είναι πλήρης αν και μόνο αν ο $(X, \rho_2)$ είναι πλήρης.

(γ) Δικαιολογήστε τις απαντήσεις που δώσατε στο (β).

(δ) Έστω $X$ ένας $T_2$ τοπολογικός χώρος και $Y \subseteq X$. Δείξτε ότι αν το $Y$ είναι συμπαγές τότε το $Y$ είναι κλειστό. Δώστε παράδειγμα ώστε η παραπάνω συνεπαγωγή να μην ισχύει αν ο $X$ δεν είναι $T_2$.

**2.**
(α) (i) Τι ονομάζουμε πλήρωση ενός μετρικού χώρου;
(ii) Δείξτε ότι κάθε μετρικός χώρος έχει πλήρωση.
(iii) Τί σημαίνει ότι η πλήρωση ενός μετρικού χώρου είναι μοναδική;

(β) (i) Πότε ένας τοπολογικός χώρος λέγεται συνεκτικός και πότε κατά μονοπάτια συνεκτικός;
(ii) Ποιά από τις παραπάνω έννοιες είναι πιο ισχυρή και ποιά ιδιότητα πρέπει να έχει ο χώρος ώστε οι ανωτέρω έννοιες να συμπίπτουν;

(γ) Διατυπώστε όλες τις ισοδύναμες συνθήκες για να είναι μία συνάρτηση $f : X \to Y$ συνεχής στο $x \in C$, όπου $X, Y$ τοπολογικοί χώροι. Στην συνέχεια αποδείξτε την ισοδυναμία για δύο από αυτές τις συνθήκες.

**ΟΜΑΔΑ Β**

**1.**
Έστω $X$ τοπολογικός χώρος και $(Y,d)$ μετρικός χώρος. Για κάθε $f \in Y^X$ και $C \subseteq X$ συμπαγές και $\epsilon > 0$, θέτουμε $B_C(f,\epsilon) = \{g \in Y^X : \sup_{x\in C} d(f(x),g(x)) < \epsilon\}$. Δείξτε ότι:
(i) Οι οικογένειες $\mathcal{B}_f = \{B_C(f,\epsilon) : C \subseteq X$ συμπαγές $, \epsilon > 0\}$, $f \in Y^X$ αποτελούν βάση περιοχών για τοπολογία στο $Y^X$, την οποία συμβολίζουμε με $\mathcal{T}_{c-c}$.
(ii) Η οικογένεια $\mathcal{B} = \bigcup_{f\in Y^X} \mathcal{B}_f$ είναι βάση για την $\mathcal{T}_{c-c}$.
(iii) Αν $(f_n)$ ακολουθία στον $Y^X$ και $f \in Y^X$ τότε $f_n \to f$ ως προς $\mathcal{T}_{c-c}$ αν και μόνο αν $f_n|_C \to f_|C$ ομοιόμορφα για κάθε $C \subseteq X$ συμπαγές

**2.**
Έστω $\phi : \mathbb{R} \to (-1,1)$, $\phi(x) = \frac{x}{1+|x|}$ ο γνωστός ομοιομορφισμός. Θεωρούμε τις γνωστές μετρικές στον $\mathbb{R}$:
$d(x,y) = |x-y|$, $d_\phi(x,y) = d(\phi(x),\phi(y))$.

(i) Δείξτε ότι $\bar{d} \sim d_\phi$, όπου $\bar{d}(x,y) = \min\{1,|x-y|\}$.
(ii) Δείξτε ότι:
$\mathcal{C}((\mathbb{R},d),(\mathbb{R},\bar{d})) = \mathcal{C}((\mathbb{R},d),(\mathbb{R},d_\phi)) = \mathcal{C}((\mathbb{R},d),(\mathbb{R},d)) =: \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ .
(iii) Αν $\rho_\infty$, $\rho'_\infty$ είναι οι supremum μετρικές που ορίζονται στο $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ από τις $\bar{d}, d_\phi$ αντίστοιχα,

$$\rho_\infty(f,g) = \sup\{\bar{d}(f(x),g(x)) : x \in \mathbb{R}\}$$
$$\rho'_\infty(f,g) = \sup\{d_\phi(f(x),g(x)) : x \in \mathbb{R}\}$$

δείξτε ότι οι χώροι $(\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\rho_\infty)$ και $(\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\rho'_\infty)$ δεν είναι ομοιόμορφοι, δηλαδή $\mathcal{T}_{\rho_\infty} \neq \mathcal{T}_{\rho'_\infty}$

**3.**
(i) Δείξτε ότι τα διαστήματα $(a,b)$, $(a,b]$ δεν είναι ομοιόμορφα.
(ii) Θεωρούμε τον υπόχωρο $Y = [0,1] \cup \{2\}$ του $\mathbb{R}$. Αν $A = \{0\} \cup [1/2,1) \cup \{2\}$, βρείτε τα σύνολα $Int_Y A$, $Int A$, $Bd_Y A$, $Bd A$.
Επίσης βρείτε τις συνεκτικές και τις κατά μονοπάτια συνεκτικές συνιστώσες του $A$.
(iii) Έστω $X,Y$ τοπολογικοί χώροι, $f,g : X \to Y$ συνεχείς συναρτήσεις και $D \subseteq X$ πυκνό.
(α) Αν η $f$ είναι επί δείξτε ότι το $f(D)$ είναι πυκνό στον $Y$.
(β) Αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in D$, δείξτε ότι $f = g$.

**ΟΜΑΔΑ Γ**

**1.**
Θεωρούμε τον χώρο $l^2 = \{x = (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty\}$ με την γνωστή μετρική $\rho(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2\right)^{1/2}$ και τον χώρο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο. Θέτουμε:

$$\phi : l^2 \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \text{με } \phi(x) = x$$

Δείξτε ότι: (i) Η $\phi$ είναι συνεχής.
(ii) Ο $l^2$ δεν είναι τοπικά συμπαγής.
(iii) Η $\phi : l^2 \to \phi(l^2) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ δεν είναι ομοιομορφισμός.

**2.**
Έστω $C = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}, f \text{ συνεχής}\}$. Στο $C$ θεωρούμε τις γνωστές μετρικές

$$\rho(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\},\ d(x,y) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

και την γνωστή τοπολογία $\mathcal{T}_{p-o}$, δηλαδή την τοπολογία με υποβάση τα σύνολα:

$$S(x,U) = \{f \in C : f(x) \in U\},\ x \in [0,1], U = (a,b) \subseteq \mathbb{R}.$$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $\phi, \psi : C \to \mathbb{R}$ με $\phi(f) = f(1)$ και $\psi(f) = \int_0^1 f(x)dx$. Δείξτε ότι:

(i) $\mathcal{T}_{p-o} \subseteq \mathcal{T}_\rho$ και ότι οι τοπολογίες $\mathcal{T}_{p-o}, \mathcal{T}_d$ δεν σχετίζονται ως προς την σχέση $\subseteq$.
(ii) Η $\phi$ είναι $\mathcal{T}_\rho$-συνεχής και όχι $\mathcal{T}_d$-συνεχής.
(iii) Η $\psi$ είναι συνεχής ως προς τις $\mathcal{T}_\rho, \mathcal{T}_d$.
(iv) Εξετάστε την συνέχεια των $\phi, \psi$ ως προς την $\mathcal{T}_{p-o}$.

**Απαντήστε σε 1 θέμα από την ομάδα Α, σε 2 θέματα από την ομάδα Β και σε 1 θέμα από την ομάδα Γ.**