Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο - Σεπτέμβριος 2019

Εισαγωγή στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

1.
α) Να βρεθεί η γενική λύση της ΜΔΕ: $yu_x + xu_y = 0$. Στη συνέχεια να βρεθεί η λύση του ΠΑΤ (αν υπάρχει) της δοσμένης ΜΔΕ με την αρχική συνθήκη $u(0, y) = e^{-3y^2}$.

β) Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - 4u_{xx} &= 0,\ 0 < x < 3, t > 0 \\
u_x(0, t) &= 0,\ t > 0 \\
u_x(3, t) &= 0,\ t > 0 \\
u(x, 0) &= 1 - \cos(7\pi x/3) + \cos(\pi x),\ 0 < x < 3 \\
u_t(x, 0) &= 0,\ 0 < x < 3
\end{aligned}
$$

2.
α) Να λυθεί αναλυτικά το ΠΣΤ

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= 0,\ 0 \le r < 1, 0 \le \phi < 2\pi \\
u_r(1, \phi) - hu(1, \phi) &= \sin(\phi) - \cos(2\phi),\ 0 \le \phi < 2\pi
\end{aligned}
$$

όπου $h \ne 0$. Αν $h = 0$ έχει το πρόβλημα λύση;

(Δίνεται ο διαφορικός τελεστής του Laplace σε πολικές συντεταγμένες $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi}$)

β) Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= 0,\ r > 1, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi < 2\pi \\
u(1, \theta, \phi) &= 1 + \cos(\theta) + \cos^2(\theta),\ 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi < 2\pi
\end{aligned}
$$

(Δεν απαιτείται αναλυτική περιγραφή του χωρισμού μεταβλητών. Δίνονται τα πολυώνυμα Legendre $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), ...$)

3.
Να βρείτε την συνάρτηση Green $G(\rho, \phi; \rho_0, \phi_0)$ του προβλήματος

$$
\begin{aligned}
\Delta G &= -\delta(r - r_0),\ \rho, \rho_0 \in (0, 1), \phi, \phi_0 \in [0, 2\pi) \\
G(1, \phi; \rho_0, \phi_0) &= 0,\ \rho_0 \in (0, 1), \phi, \phi_0 \in [0, 2\pi)
\end{aligned}
$$

όπου $r = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)$ και $r_0 = (\rho_0\cos\phi_0, \rho_0\sin\phi_0)$.

(Δουλέψτε ή με την μέθοδο των ειδώλων ή με την μέθοδο ιδιοσυναρτήσεων. Στην δεύτερη περίπτωση θα χρειαστείτε την αναπαράσταση $\delta(r - r_0) = \frac{1}{\rho}\delta(\rho - \rho_0)\delta(\phi - \phi_0)$).

4.

α) Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - u_{xx} &= -2e^{-x}(\sin t + \cos t),\ x > 0, t > 0 \\
u(0,t) &= \sin t + \cos t,\ t \geq 0 \\
u(x,0) &= e^{-x},\ x \geq 0 \\
u_t(x,0) &= e^{-x},\ x \geq 0
\end{aligned}
$$

με την χρήση του μετασχηματισμού Laplace.

β) Να αποδειχθεί, με την ενεργειακή μέθοδο, ότι το ΠΑΣΤ

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - u_{xx} &= te^{-x^2},\ x \in (0,l), t > 0 \\
u(x,0) &= \cos x,\ 0 \leq x \leq l \\
u_t(x,0) &= \sin x,\ 0 \leq x \leq l \\
u_x(0,t) &= t^2 e^{-t},\ t \geq 0 \\
u(l,t) &= e^{-t^2},\ t \geq 0
\end{aligned}
$$

έχει το πολύ μία λύση.