

## Μαθηματικά για Οικονομολόγους

**Οδηγίες:** Από τα θέματα 1.,2. να επιλέξετε ένα και από τα 3.,4.,5.,6. να επιλέξετε τρία.

**1.**

α) Να εξετάσετε αν το σύνολο  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4(x + 1) - 3y = 4\}$  αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του  $\mathbb{R}^2$ .

β) Να εξετάσετε αν είναι γραμμικά ανεξάρτητα ή εξαρτημένα τα διανύσματα  $v_1 = (1, 0, 0)$ ,  $v_2 = (1, 1, 1)$ ,  $v_3 = (0, 1, 1)$ .

γ) Αν η ορίζουσα ενός πίνακα  $A \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$  είναι  $\det(A) = 7$ , τότε:

i. Ποιά είναι η τάξη του πίνακα  $A$ ;

ii. Πόσες μη μηδενικές γραμμές θα έχει ο κλιμακωτός πίνακας ( $U$ ) που θα προκύψει από τον  $A$  μετά από απαλοιφές;

iii. Πόσες βασικές και πόσες ελεύθερες μεταβλητές θα έχετε σε ένα τυχαίο σύστημα  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ;

**2.**

Έστω ο πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  με  $A = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ .

α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $A$ .

β) Να αποδείξετε ότι ο πίνακας  $A$  ικανοποιεί/μηδενίζει την χαρακτηριστική του εξίσωση.

γ) Δείξτε ότι ο πίνακας  $A$  διαγωνοποιείται και βρείτε έναν πίνακα  $P$  που τον διαγωνοποιεί, αντίστοιχο διαγώνιο  $D$ .

δ) Χρησιμοποιώντας τους πίνακες που βρήκατε στο ερώτημα β) γράψτε τη σχέση (μητρική μορφή) με βάση την οποία θα υπολογιστεί ο πίνακας  $A^{60}$ .

**3.**

Έστω ότι η συνάρτηση ζήτησης ενός προϊόντος παραγόμενο από μία μονοπωλιακή επιχείρηση είναι  $q = \frac{200-p}{4}$ . Αν οι συναρτήσεις του συνολικού μεταβλητού κόστους και του σταθερού κόστους είναι αντίστοιχα:  $VC = 11q^2 + 50q$  και  $FC = 60$  χρηματικές μονάδες, ζητείται να υπολογισθούν:

α) Η ποσότητα παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη. Ποιά τα μέγιστα κέρδη της επιχείρησης;

β) Η ποσότητα παραγωγής όπου το οριακό κόστος ισούται με το μέγιστο κόστος. ( $MC = AC$ )

γ) Τα νεκρά σημεία της επιχείρησης, η τιμή πώλησης του προϊόντος, το συνολικό κόστος και τα συνολικά έσοδα της επιχείρησης για την ποσότητα παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη.

ε) Τα προκύπτοντα αποτελέσματα να επαληθευθούν διαγραμματικά.

**4.**

Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα ακρότατα της συνάρτησης  $z = 3x^2 + y^3 - 3xy$ .

**5.**

Έστω ότι η συνάρτηση χρησιμότητας ενός καταναλωτή είναι  $U = 2x^2y$  όπου  $x, y$  ποσότητες δύο αγαθών. Αν η τιμή του αγαθού  $x$  είναι  $P_x = 4$  ευρώ, του  $y$  είναι  $P_y = 5$  ευρώ και το εισόδημα του καταναλωτή είναι  $I = 120$  ευρώ, τότε να βρεθούν οι άριστες ποσότητες από τα αγαθά  $x$  και  $y$  που πρέπει να καταναλώσει ώστε να μεγιστοποιηθεί η χρησιμότητά του. Δώστε την οικονομική ερμηνεία του πολλαπλασιαστή Lagrange ( $\lambda$ ).

**6.**

α) Να βρεθεί το διαφορικό πρώτης και δεύτερης τάξης της συνάρτησης  $y = f(u) = 2u + 3u^2$ , όπου  $u = f(x) = x = x^2$ .

β) Να βρεθεί η ολική παράγωγος  $\frac{dz}{dt}$  των συναρτήσεων:

i.  $z = f(x, y) = x^5y^4$ , όπου  $x = t^4, y = t^2$ .

ii.  $z = f(x, y) = x^2 + 2x + y^2$ , όπου  $y = \frac{1}{x}$ .

γ) Να βρεθεί η παράγωγος  $\frac{dy}{dx}$  της πεπλεγμένης συνάρτησης  $x^3 + 2x^2y - 3xy^2 - y^3 = 0$ .

δ) Έστω η συνάρτηση ζήτησης ενός προϊόντος στην αγορά  $P = 33 - 6Q - Q^2$ . Αν η τιμή ισορροπίας είναι 6 ευρώ, να υπολογισθεί το πλεόνασμα του καταναλωτή.