

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

1.

Λύσατε το πρόβλημα Cauchy της εξίσωσης

$$u_t + (x+t)u_x = xu, \quad x \in [0, 1] \cup [2, 3], \quad 0 < t < +\infty,$$

με κάποια δεδομένη ομαλή (C^1) συνάρτηση g ως αρχικά δεδομένα. Είναι το πρόβλημα καλώς τεθημένο για κάθε χρόνο; Δικαιολογήστε αυστηρά την απάντησή σας.

2.

Λύσατε για κάθε $t > 0$ το πρόβλημα Cauchy της εξίσωσης

$$u_t + uu_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t < +\infty$$

με αρχικά δεδομένα

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & , x < 0 \\ 1 - x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , x > 1 \end{cases}$$

Πού είναι το κύμα κρούσης; Ικανοποιείται η συνθήκη εντροπίας; Σχεδιάστε τις χαρακτηριστικές καμπύλες.

3.

Αποδείξτε για το πρόβλημα αρχικών τιμών της κυματικής εξίσωσης

$$u_{tt} = u_{xx} + f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t < +\infty$$

ότι αν τα δεδομένα (δηλαδή τα αρχικά δεδομένα και ο μη ομογενής όρος f) έχουν συμπαγή φορέα, τότε, σε κάθε χρόνο, η λύση έχει επίσης συμπαγή φορέα.

4.

Διατυπώσατε την Αρχή Μεγίστου για την εξίσωση θερμότητας σε κατάλληλο χωρίο. Διατυπώσατε και αποδείξατε κάποιο θεώρημα μοναδικότητας για την εξίσωση θερμότητας σε κατάλληλο χωρίο χρησιμοποιώντας την Αρχή Μεγίστου.