

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

1.

Να βρεθεί η γενική λύση $u(x, y)$ της εξίσωσης

$$uu_x + yu_y = x - y$$

με την μέθοδο των χαρακτηριστικών. Να παρουσιαστούν αναλυτικά όλες οι πράξεις.

2.

Θεωρούμε την κυματική εξίσωση

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, t > 0,$$

με αρχικές συνθήκες

$$u(x, 0) = x(1 - x)^2, \quad u_t(x, 0) = 0,$$

και συνοριακές συνθήκες

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0.$$

Να γράψετε αναλυτικά τον τύπο της επέκτασης της $u(x, 0)$ σε όλο το \mathbb{R} . Να υπολογιστεί η τιμή $u(1/2, 1)$.

3.

Να βρείτε πρώτα την κανονική μορφή της εξίσωσης

$$x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} - xu_x - yu_y + u = 0,$$

και έπειτα να βρείτε την γενική της λύση. Να παρουσιαστούν αναλυτικά όλες οι πράξεις.

Υπόδειξη: Για να βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης στην κανονική της μορφή, αναζητήστε λύσεις της μορφής $\xi v(\xi)$. Τι ικανποιεί η v ;

4.

Να βρεθεί με την μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών η αναπαράσταση σε σειρά της λύσης της εξίσωσης του Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \pi, 0 < y < \pi,$$

όπου

$$u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = 0, \quad u_y(x, 0) = x - \frac{\pi}{2}, u_y(x, \pi) = 0.$$

5.

Θεωρούμε την λύση της εξίσωσης Poisson $u_{xx} + u_{yy} = q$ στο D με $u = f$ στο ∂D . Να αποδείξετε ότι το πρόβλημα έχει λύση αρκεί να ισχύει

$$\iint_D q dx dy = \int_{\partial D} f ds.$$