

## Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

1.

Λύσατε το πρόβλημα Cauchy

$$u_t + xu_x = xu, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

για κάποια δεδομένη ομαλή  $C^1$  συνάρτηση  $g$  ως αρχικά δεδομένα. Είναι το πρόβλημα καλώς τεθημένο για κάθε χρόνο; Δικαιολογήστε αυστηρά την απάντησή σας.

2.

Λύσατε την εξίσωση Laplace στον μοναδιαίο δίσκο με συνοιακά δεδομένα  $u(\theta) = \cos \theta$  πάνω στον μοναδιαίο κύκλο  $\{r = 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ . Αποδείξτε ότι μικρές διαταραχές των παραπάνω συνοριακών δεδομένων δίνουν μικρές διαταραχές της αντίστοιχης λύσης του προβλήματος Dirichlet' αφού πρώτα διατυπώσετε αυστηρά την πρόταση σε εισαγωγικά.

3.

Αποδείξτε ότι για το πρόβλημα αρχικών τιμών της κυματικής εξίσωσης

$$u_{tt} = u_{xx} + f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

ότι αν τα δεδομένα (δηλαδή τα αρχικά δεδομένα και ο μη ομογενής όρος  $f$ ) έχουν συμπαγή φορέα τότε, σε κάθε χρόνο, η λύση έχει επίσης συμπαγή φορέα.

4.

Έστω  $\phi \in C^1(\mathbb{R})$  περιοδική συνάρτηση. Θεωρούμε το πρόβλημα

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

με αρχικά δεδομένα  $\phi$ . Υπολογίσατε τύπο για μια λύση του  $u$  και αποδείξατε αυστηρά ότι αυτός ο τύπος λύνει το πρόβλημα αρχικών τιμών. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει άλλη λύση ( $C^1$  και περιοδική).