Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων - Ιούνιος 2018

Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι

1.
Δείξτε ότι (α΄) οι συναρτήσεις που απεικονίζουν τους μιγαδικούς αριθμούς (i) στο πραγματικό τους μέρος, (ii) στο φανταστικό τους μέρος και (iii) στην απόλυτη τιμή τους και (β΄) η εκθετική συνάρτηση στο $\mathbb{C}$, είναι συνεχείς συναρτήσεις.

2.
Έστω $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $z_0 \in D$ και $f : D \to \mathbb{C}$.

(α΄) Δείξτε ότι η f είναι μιγαδικά διαφορίσιμη στο z_0 αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0)}{|z - z_0|} = 0.$$

(β΄) Γράψτε την $\mathbb{C}$-γραμμική συνάρτηση $z \mapsto \lambda z$ με $z \in \mathbb{C}$ και σταθερό $\lambda \in \mathbb{C}$ ως $\mathbb{R}$-γραμμική συνάρτηση $(x, y) \mapsto \Lambda(x, y)^T$ με $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και σταθερό $\Lambda \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(γ΄) Δείξτε ότι η f είναι μιγαδικά διαφορίσιμη στο z_0 αν και μόνο αν η f είναι πραγματικά διαφορίσιμη στο z_0 και ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy - Riemann.

(δ΄) Εξετάστε την $f(z) = \bar{z}, z \in \mathbb{C}$, ως προς την μιγαδική διαφορισιμότητά της.

3.
Έστω $\partial D(a, r), r > 0$ ο απλά κλειστά παραμετρικοποιημένος και θετικά προσανατολισμένος κύκλος κέντρου $a \in \mathbb{C}$ και ακτίνας $r > 0$.

(α΄) Δείξτε ότι

$$\int_{\partial D(a,r)} (z - a)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & , n = -1 \\ 0 & , n \neq -1 \end{cases} , n \in \mathbb{Z}.$$

(β΄) Έστω $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ μια C^1 καμπύλη και $f, f_n : \gamma([a, b]) \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, συνεχείς με $f_n \to f$ ομοιόμορφα. Δείξτε ότι

$$\int_\gamma f_n(z)dz \to \int_\gamma f(z)dz.$$

(γ΄) Δώστε τον ορισμό της συνάρτησης δείκτης στροφής $\delta_\gamma : \mathbb{C}\backslash\gamma([a, b]) \to \mathbb{Z}$ μιας κλειστής C^1 καμπύλης $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ και δείξτε με χρήση των (α΄) και (β΄), της γεωμετρικής σειράς και του Κριτηρίου του Weierstrass για σειρές συναρτήσεων ότι

$$\delta_{\partial D(a,r)}(z) = \begin{cases} 1 & , z \in D(a, r) \\ 0 & , z \in \mathbb{C}\backslash\bar{D}(a, r) \end{cases}$$

4.
(α΄) Έστω $a \in \mathbb{C}, r > 0, D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό με $\bar{D}(a, r) \subset D$ και $f : D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Δείξτε ότι

$$|f^{(n)(a)}| \leq \frac{n!}{r^n} \|f\|_{\partial D(a,r)}, \; n \in \mathbb{N}_0.$$

(β′) Διατυπώστε και αποδείξτε το Θεώρημα Liouville.

5.
Έστω $k \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{C}$ με $a \neq b$ και $f(z) = \frac{1}{(z-a)^k(z-b)}, z \neq a, b$.

(α′) Βρείτε και χαρακτηρίστε τις μεμονωμένες ανωμαλίες της f.

(β′) Αναπτύξτε την f σε σειρά Laurent στον δακτύλιο $D(a, 0, |a-b|)$.