

Εισαγωγή στις Πιθανότητες

1.

(α) Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής (τ.μ.) X δίνεται

$$f_X(x) = \begin{cases} a - |x| & , -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}, \text{ με } a > 0.$$

(i) Ναδειχτεί ότι $a = 1$ και να προσδιοριστεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) $F_X(x)$ της τ.μ. X .

(ii) Να υπολογισθεί η πιθανότητα $P(|X| \leq 1/2)$ με την χρήση της α.σ.κ. και η πιθανότητα $P(1/2 < X < 1)$ με χρήση της σ.μ.π..

(iii) Να υπολογισθεί η αναμενόμενη τιμή και η διακύμανση της X .

(β) Να προσδιορισθεί ένα κάτω φράγμα για την πιθανότητα $P(|X| \leq 1/2)$.

2.

(α) Μία τάξη αποτελείται από 4 φοιτητές και 12 φοιτήτριες και χωρίζεται τυχαία σε 4 ομάδες των 4 ατόμων η κάθε ομάδα. Ποιά η πιθανότητα κάθε ομάδα να έχει έναν φοιτητή;

(β) Μία οικογένεια με 3 παιδιά επιλέγεται στην τύχη από τις οικογένειες μίας πόλης. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$A = \{\text{η οικογένεια έχει παιδιά και των δύο φύλων}\}$$

$$B = \{\text{η οικογένεια έχει το πολύ ένα κορίτσι}\}$$

Είναι τα A, B ανεξάρτητα; Ποιά η πιθανότητα πραγματοποίησης τουλάχιστον ενός εκ των A, B ;

(γ) Η σ.μ.π. της X δίνεται να είναι $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$. Να προσδιορισθεί η κατανομή της τ.μ. $Y = \frac{1}{X}$.

3.

(α) Έστω ένα νόμισμα με πιθανότητα εμφάνισης της όψης Γράμματα (Γ) ίση με $p \in (0, 1)$ σε οποιαδήποτε ρίψη. Το νόμισμα αυτό ρίχνεται επανηλλειμένα και οι ρίψεις τερματίζονται όταν εμφανίζεται η όψη Γ . Αν αυτό δεν συμβεί στις $n-1$ πρώτες ρίψεις τότε η ακολουθία των ρίψεων τερματίζεται στην n ρίψη. Αν X παριστά τον αριθμό των ρίψεων, να προσδιορισθεί η κατανομή της τ.μ. X .

(β) Ένας σκοπευτής πυροβολεί έναν στόχο μέχρι να τον πετύχει δύο φορές. Έστω ότι η πιθανότητα να πετύχει τον στόχο είναι 0.49, οποιαδήποτε φορά και αν πυροβολήσει. Να υπολογισθεί (i) η πιθανότητα ο σκοπευτής αυτός να πυροβολήσει αυστηρά λιγότερες από 4 φορές τον στόχο μέχρι να πετύχει τον σκοπό του, (ii) ο αναμενόμενος αριθμός φορών που θα πυροβολήσει τον στόχο.

(Οι απαντήσεις στο ερώτημα αυτό να δοθούν με την χρήση πιθανοθεωρητικών μοντέλων και να

δικαιολογηθούν πλήρως τα μοντέλα που θα χρησιμοποιηθούν.)

4.

(α) Η χολιστερίνη στο αίμα των ενηλίκων υποθέτουμε ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 200 και τυπική απόκλιση 10 μονάδες. Ποιό το επίπεδο χολιστερίνης που πάνω από αυτό κυμένεται η χολιστερίνη του 5% των ενηλίκων;

(β) Ένα λεωφορείο περνάει από συγκεκριμένη στάση κάθε τέταρτο αρχίζοντας στις 6:00 π.μ.. Επιβάτης φτάνει στην στάση αυτή κάθε πρωί κάποια χρονική στιγμή μεταξύ 7:10 και 7:30 π.μ.. Να προσδιορισθεί η κατανομή του χρόνου που θα περιμένει στη στάση έως ότου φτάσει το πρώτο λεωφορείο.