

## Θεωρία Σωμάτων

1.

Έστω  $\omega = e^{2\pi i/10} = e^{\pi i/5}$  πρωταρχική δέκατη ρίζα της μονάδας και έστω  $E = \mathbb{Q}(\omega)$ .

α) Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του  $\omega$  πάνω από το  $\mathbb{Q}$ .

β) Δείξτε ότι η επέκταση  $\mathbb{Q} \leq E$  είναι επέκταση Galois.

γ) Βρείτε την ομάδα Galois  $G = Gal(E/\mathbb{Q})$ , όλες τις υποομάδες  $H$  της  $G$  και κατατάξτε τις ανάλογα με την τάξη τους.

δ) Βρείτε τις αντίστοιχες ενδιάμεσες επεκτάσεις  $\mathbb{Q} \leq L \leq E$  και κατατάξτε τις ανάλογα με τον βαθμό τους  $[L : \mathbb{Q}]$ .

2.

Έστω  $K \leq E$  μία πεπερασμένη επέκταση σωμάτων. Έστω  $f(x) \in K[x]$  ένα ανάγωγο πολυώνυμο με τον βαθμό  $deg f(x)$  να μην διαιρεί τον βαθμό της επέκτασης  $[E : K]$ . Δείξτε ότι το  $f(x)$  δεν έχει ρίζες στο σώμα  $E$ .

3.

Έστω  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$  πολυώνυμο βαθμού 4 το οποίο έχει ρίζες  $i\sqrt{3}$  και  $2 + 5i$ .

α) Βρείτε όλες τις ρίζες του  $f(x)$ .

β) Έστω  $E$  το σώμα ριζών (σώμα ανάλυσης) του  $f$ . Βρείτε τον βαθμό της επέκτασης σωμάτων  $[E : \mathbb{Q}]$ .

4.

Δείξτε ότι η γωνία  $40^\circ$  δεν είναι κατασκευάσιμη με δύο τρόπους: α) με χρήση του θεωρήματος που χαρακτηρίζει τα κατασκευάσιμα πολύγωνα σε σχέση με τους πρώτους αριθμούς του Fermat και β) χωρίς την χρήση αυτού του θεωρήματος ή άλλης άσκησης περί μη κατασκευασιμότητας συγκεκριμένων γωνιών.

(Υπενθύμιση:  $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ ,  $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$ .)

5.

Έστω  $p$  πρώτος και  $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$  ανάγωγο πολυώνυμο βαθμού  $n$  το οποίο διαιρεί το πολυώνυμο  $x^{p^d} - x \in \mathbb{Z}_p[x]$ . Δείξτε ότι το  $n$  διαιρεί το  $d$ .