

Θεωρία Σωμάτων

1.

Βρείτε το σώμα ανάλυσης του α) $x^6 - 3$ πάνω από το \mathbb{Q} β) $x^3 + 2x + 1$ πάνω από το F_3 .

2.

α) Υπολογίστε τα κυκλοτομικά πολυώνυμα $\Phi_2(x)$, $\Phi_4(x)$, $\Phi_8(x)$ και βρείτε και αποδείξτε τύπο για το $\Phi_{2^n}(x)$.

β) Δείξτε ότι

$$\Phi_{pn}(x) = \frac{\Phi_n(x^p)}{\Phi_n(x)}$$

όπου p πρώτος με $(p, n) = 1$.

3.

α) Αν L/K είναι Galois με $Gal(L/K)$ κυκλική τάξης 30 δείξτε ότι για κάθε d διαιρέτη του 30 υπάρχει μοναδικό υπόσωμα M_d με $K \leq M_d \leq L$ και $[M_d : K] = d$. Είναι η M_d/K Galois;

β) Έστω L/K Galois με $Gal(L/K)$ τάξης 105 και A, B υποομάδες της G τάξης $|A| = 21$ και $|B| = 35$. Αν $\mathcal{F}(A)$ και $\mathcal{F}(B)$ τα σώματα σταθερών των A, B , δείξτε ότι $\mathcal{F}(A) \cap \mathcal{F}(B) = K$. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ό,τι γνωρίζετε από θεωρία ομάδων χωρίς απόδειξη)

4.

Δείξτε ότι η επέκταση $\mathbb{Q}(\zeta_5, i)/\mathbb{Q}$ είναι Galois και υπολογίστε την ομάδα $G = Gal(\mathbb{Q}(\zeta_5, i)/\mathbb{Q})$. Υπολογίστε δηλαδή την τάξη της και με ποιά γνωστή ομάδα είναι ισόμορφη. Δώστε τουλάχιστον 3 μη τετριμμένες υποομάδες της G ($\neq \emptyset, G$) και τα αντίστοιχα σώματα σταθερών τους.

5.

Εξηγήστε γιατί το πολυώνυμο $x^5 - 4x + 2$ δεν είναι επιλύσιμο με ριζικά πάνω από το \mathbb{Q} .