Πανεπιστήμιο Κρήτης - Σεπτέμβριος 2017

Θεωρία Συνόλων

1.

(i) Δώστε τον ορισμό του επαγωγικού συνόλου. Κατόπιν, να δείξετε ότι αν το σύνολο $\mathcal{A}$ είναι ένα μη κενό σύνολο επαγωγικών συνόλων (δηλαδή κάθε στοιχείο του $\mathcal{A}$ είναι επαγωγικό) τότε και το $\bigcap \mathcal{A}$ είναι επαγωγικό.

(ii) Δώστε τον ορισμό του μεταβατικού συνόλου. Κατόπιν, να δείξετε ότι αν το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι ένα μη κενό σύνολο μεταβατικών συνόλων (δηλαδή κάθε στοιχείο του $\mathcal{B}$ είναι μεταβατικό) τότε και το $\bigcap \mathcal{B}$ είναι μεταβατικό.

2.

(i) Έστω σύνολα A, B καθώς και δεδομένη επί συνάρτηση $f : A \to B$. Να δείξετε ότι $|\mathcal{P}(A)| \leq |\mathcal{P}(B)|$.

(ii) Έστω δεδομένα σύνολα A, B, C και D τέτοια ώστε $A \sim C$ και $B \sim D$. Χωρίς χρήση πληθαρίθμων, να δείξετε ότι $A \times B \sim C \times D$.
(Λύση αυτού του ερωτήματος με χρήση πληθαρίθμων δεν λαμβάνεται υπ᾽ όψιν.)

3.

Έστω $A \subseteq \omega$ ένα μεταβατικό υποσύνολο του ω. Δείξτε ότι αν το A είναι άνω φραγμένο στο ω (ως προς την συνήθη διάταξη του ω) τότε $A \in \omega$.

4.

Χρησιμοποιώντας κανόνες πληθικής αριθμητικής, να υπολογίσετε τους πληθαρίθμους των ακόλουθων συνόλων: $3^{\mathbb{Z}}$, $\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{Q}^{\mathbb{R}}$. Να εκφράσετε τα με χρήση μόνο (κάποιων εκ) των: 2, $\aleph_0$, $\mathfrak{c}$.

5.

Έστω $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ καλά διατεταγμένα σύνολα με $A, B \neq \emptyset$. Θέτουμε $C = A \times B$. Στο (μη κενό) σύνολο C ορίζουμε την διμελή σχέση $<_C$ ως εξής: για κάθε $(a, b), (a', b') \in C$, όπου $a, a' \in A$ και $b, b' \in B$,

$$(a, b) <_C (a', b') \leftrightarrow (a <_A a' \ \vee \ (a = a' \ \wedge \ b <_B b')).$$

Να δείξετε ότι η σχέση $<_C$ (η οποία συνήθως ονομάζεται λεξικογραφική διάταξη) είναι καλή διάταξη στο σύνολο C.