

Θεωρία Πιθανοτήτων

1.

Αν $P(A) = 2/3$, $P(B) = 1/2$, να βρείτε την ελάχιστη δυνατή και την μέγιστη δυνατή τιμή της $P(A \cap B)$. Σε ποιές περιπτώσεις 'πιάνονται' αυτές οι τιμές;

2.

Αν $P(X \leq 0) = P(X \geq 0) = 1$, σχεδιάστε την συνάρτηση κατανομής F_X και βρείτε τις $E(X)$, $Var(X)$.

3.

Ένας παίκτης ρίχνει διαδοχικά ένα νόμισμα το οποίο δείχνει Κ με πιθανότητα $2/3$. Ο παίκτης σταματά την πρώτη φορά που το νόμισμα θα δείξει Κ. Αν αυτό συμβεί στην n ρίψη ο παίκτης κερδίζει a^{n-1} ευρώ, όπου $0 < a < 1$. Βρείτε την τιμή του a ώστε το αναμενόμενο κέρδος του παίκτη να είναι $4/5$.

4.

Ένα δοχείο περιέχει n βόλους αριθμημένους από το 1 έως το n . Επολέγουμε τυχαία έναν βόλο και, κατόπιν, χωρίς να επαναποθετήσουμε τον βόλο στο δοχείο, επιλέγουμε πάλι τυχαία έναν βόλο. Αν X, Y είναι οι αριθμοί του πρώτου και του δεύτερου βόλου, αντίστοιχα, αποδείξτε ότι $P(X < Y) = P(X > Y)$.

5.

Σε μία αεροπορική πτήση με αεροπλάνο 90 θέσεων δεν εμφανίζονται κατά την αναχώρηση κατά μέσο όρο 2 από όσους έχουν κάνει κράτηση. Ποιά είναι η πιθανότητα να ταξιδέψει κάποιος που βρίσκεται στην 4η θέση του καταλόγου της αναμονής; (Φυσικά χρησιμοποιήστε την κατανομή Poisson.)

6.

Έστω ότι η (X, Y) ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(1,0)$, $(0,1)$ και $(1,1)$. Βρείτε την $P(X \leq Y)$, καθώς και τις f_X , f_Y . Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

7.

Έστω ότι η (X, Y) ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στον δίσκο $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Βρείτε την μέση τιμή της απόστασης του (X, Y) από το κέντρο του δίσκου.

8.

Οι X, Y ακολουθούν η καθεμία την κανονική κατανομή $\mathcal{N}(0, 1)$ και είναι ανεξάρτητες. Ποιά κατανομή ακολουθεί η (X, Y) ; Αποδείξτε ότι η $(X + Y, Y)$ ακολουθεί κανονική κατανομή και βρείτε τον πίνακα συνδιακύμανσεων της $(X + Y, Y)$. Είναι οι $X + Y, Y$ ανεξάρτητες;

9.

Έστω σταθερά c και έστω ότι η X έχει συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x) = ce^{-3x}$ για $x \geq 0$ και $f_X(x) = 0$ για $x < 0$. Βρείτε την c . Βρείτε την ροπογεννήτρια $M_X(t)$ της X και βάσει αυτής βρείτε τις $E(X)$, $E(X^2)$. Αν οι X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες και έχουν την ίδια κατανομή με αυτήν της X , βρείτε την ροπογεννήτρια $M_{X_1+X_2}(t)$ της $X_1 + X_2$.