Πανεπιστήμιο Κρήτης - Ιούνιος 2018

Θεωρία Πιθανοτήτων

1.
Αν $P(A) = 2/3$, $P(B) = 1/2$, να βρείτε την ελάχιστη δυνατή και την μέγιστη δυνατή τιμή της $P(A \cap B)$. Σε ποιές περιπτώσεις 'πιάνονται' αυτές οι τιμές;

2.
Αν $P(X \leq 0) = P(X \geq 0) = 1$, σχεδιάστε την συνάρτηση κατανομής F_X και βρείτε τις $E(X)$, $Var(X)$.

3.
Ένας παίκτης ρίχνει διαδοχικά ένα νόμισμα το οποίο δείχνει Κ με πιθανότητα 2/3. Ο παίκτης σταματά την πρώτη φορά που το νόμισμα θα δείξει Κ. Αν αυτό συμβεί στην n ρίψη ο παίκτης κερδίζει a^{n-1} ευρώ, όπου $0 < a < 1$. Βρείτε την τιμή του a ώστε το αναμενόμενο κέρδος του παίκτη να είναι 4/5.

4.
Ένα δοχείο περιέχει n βώλους αριθμημένους από το 1 έως το n. Επολέγουμε τυχαία έναν βώλο και, κατόπιν, χωρίς να επανατοποθετήσουμε τοω βώλο στο δοχείο, επιλέγουμε πάλι τυχαία έναν βώλο. Αν X, Y είναι οι αριθμοί του πρώτου και του δεύτερου βώλου, αντίστοιχα, αποδείξτε ότι $P(X < Y) = P(X > Y)$.

5.
Σε μία αεροπορική πτήση με αεροπλάνο 90 θέσεων δεν εμφανίζονται κατά την αναχώρηση κατά μέσο όρο 2 από όσους έχουν κάνει κράτηση. Ποιά είναι η πιθανότητα να ταξιδέψει κάποιος που βρίσκεται στην 4η θέση του καταλόγου της αναμονής; (Φυσικά χρησιμοποιήστε την κατανομή Poisson.)

6.
Έστω ότι η (X, Y) ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία (1,0), (0,1) και (1,1). Βρείτε την $P(X \leq Y)$, καθώς και τις f_X, f_Y. Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

7.
Έστω ότι η (X, Y) ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στον δίσκο $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Βρείτε την μέση τιμή της απόστασης του (X, Y) από το κέντρο του δίσκου.

8.
Οι X, Y ακολουθούν η καθεμία την κανονική κατανομή $\mathcal{N}(0, 1)$ και είναι ανεξάρτητες. Ποιά κατανομή ακολουθεί η (X, Y); Αποδείξτε ότι η $(X + Y, Y)$ ακολουθεί κανονική κατανομή και βρείτε τον πίνακα συνδιακύμάνσεων της $(X + Y, Y)$. Είναι οι $X + Y, Y$ ανεξάρτητες;

9.
Έστω σταθερά c και έστω ότι η X έχει συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x) = ce^{-3x}$ για $x \geq 0$ και $f_X(x) = 0$ για $x < 0$. Βρείτε την c. Βρείτε την ροπογεννήτρια $M_X(t)$ της X και βάσει αυτής βρείτε τις $E(X)$, $E(X^2)$. Αν οι X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες και έχουν την ίδια κατανομή με αυτήν της X, βρείτε την ροπογεννήτρια $M_{X_1+X_2}(t)$ της $X_1 + X_2$.

Λύσεις

1.
Έχουμε $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{7}{6}-P(A\cup B)\geq\frac{1}{6}$ αφού $P(A\cup B)\leq 1$. Επίσης $P(A\cap B)\leq P(A)=\frac{2}{3}$. Το κάτω φράγμα για την πιθανότητα $P(A\cap B)$ πιάνεται όταν το ενδεχόμενο $A\cup B$ είναι σχεδόν όλος ο δειγματικός χώρος Ω, δηλαδή όταν $P(A\cap B)=1$ και το άνω φράγμα πιάνεται όταν $A\subseteq B$.

2.
Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα: αν $P(A)=P(B)=1$ τότε $P(A\cap B)=1$.
Προκύπτει $P(X=0)=1$. Άρα

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$$

Προφανώς $E(X)=0$ και $Var(X)=0$ (αφού η X είναι σταθερή).

3.
Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή X η οποία εκφράζει τον αριθμό των ρίψεων μέχρις ότου εμφανιστεί πρώτη φορά Κ. Ως γνωστόν, η X ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση μάζας πιθανότητας

$$P(X=k)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1},\ k\in\mathbb{N}.$$

Τότε το κέρδος του παίκτη είναι a^{X-1}. Επομένως
$E(a^{X-1})=\sum_{k=1}^{\infty}a^{k-1}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{3}\right)^{n}=\frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{a}{3}}=\frac{2}{3-a}$. Άρα το αναμενόμενο κέρδος είναι $\frac{4}{5}$ αν και μόνο αν $a=\frac{1}{2}$.

4.
Θα υπολογίσουμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής (X,Y). Προφανώς αυτή η τυχαία μεταβλητή παίρνει τιμές στο σύνολο $\{1,2,...,n\}^2$. Επίσης είναι προφανές ότι η X κατανέμεται ομοιόμορφα στο σύνολο $\{1,2,...,n\}$. Επίσης, δεδομένου ότι έχουμε τραβήξει τον πρώτο βώλο X, ο αριθμός του δεύτερου βώλου κατανέμεται ομοιόμορφα στο σύνολο $\{1,2,...,n\}\backslash\{X\}$. Αυτό σημαίνει ότι η δεσμευμένη κατανομή της $Y|X$ είναι η ομοιόμορφη στο σύνολο $\{1,2,...,n\}\backslash\{X\}$. Έχουμε δηλαδή $P(X=x)=\frac{1}{n}$, $x=1,2,...,n$ και $P(Y=y|X=x)=\frac{1}{n-1}$, $x=1,2,...,n$, $y\in\{1,2,...,n\}\backslash\{x\}$. Επομένως

$$P(X=x,Y=y)=P(Y=y|X=x)P(X=x)=\frac{1}{n(n-1)},\ x,y\in\{1,2,...,n\},x\neq y$$

.
Δηλαδή η (X,Y) έχει ομοιόμορφη κατανομή στο σύνολο $\{1,2,...,n\}^2\backslash\{(1,1),...,(n,n)\}$. Αυτή η κατανομή είναι συμμετρική, δηλαδή $(X,Y)\sim(Y,X)$ και, επίσης, $X\neq Y$ με πιθανότητα 1. Επομένως $P(X<Y)=P(Y<X)$.

5.
(Δεν θα χρησιμοποιήσουμε την κατανομή Poisson αλλά την κατανομή Bernoulli)
Για κάθε $i=1,...,90$, θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{αν ο } i\text{-οστός πελάτης εμφανιστεί}\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(X_4 = 1)$. Υποθέτουμε φυσικά ότι οι πελάτες εμφανίζονται ανεξάρτητα και ότι κάθε πελάτης εμφανίζεται με την ίδια πιθανότητα, έστω p. Τότε οι $X_1, ..., X_{90}$ είναι ανεξάρρτητες και ακολουθούν την κατανομή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας (να εμφανιστεί) p. Η τυχαία μεταβλητή $X_1 + ... + X_{90}$ εκφράζει τον αριθμό όλων των πελατών που θα εμφανιστούν. Η μέση τιμή αυτής της τυχαίας μεταβλητής είναι $E(X_1 + ... + X_{90}) = \underbrace{p + ... + p}_{90} = 90p$. Από υπόθεση $90p = 90 - 2 = 88$, άρα $p = 44/45$.

6.
Το τρίγωνο περιγράφεται ως $T = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : 1 - x \leq y\}$ και το εμβαδόν του T είναι $|T| = \frac{1}{2}$. Επομένως $f_{X,Y}(x, y) = 2$, $(x, y) \in T$. Ορίζουμε επίσης το σύνολο $B = \{(x, y) \in T : x \leq y\}$. Τότε

$P(X \leq Y) = \iint_B f_{X,Y}(x, y) = 2|B| = \frac{1}{2}$.

$f_X(x) = \int_0^1 f_{X,Y}(x, y)dy = \int_{1-x}^1 2dy = 2x$, $x \in [0, 1]$ και όμοια $f_Y(y) = 2y$, $y \in [0, 1]$. Οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες διότι δεν ισχύει $f_X(x)f_Y(y) = f_{X,Y}(x, y)$, για κάθε $(x, y) \in [0, 1]^2$.

7.
Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Θέλουμε να υπολογίσουμε την EZ. Έστω D ο δεδομένος δίσκος εμβαδού $|D| = \pi$. Τότε η τυχαία μεταβλητή (X, Y) έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi}$, $(x, y) \in D$. Χρησιμοποιώντας το πολικό σύστημα συντεταγμένων, υπολογίζουμε

$EZ = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} f_{X,Y}(x, y)dxdy = \frac{1}{\pi} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}dxdy = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{r}rd\theta dr = \frac{1}{\pi} 2\pi \int_0^1 r^{3/2}dr = 2\frac{2}{5}r^{5/2}|_0^1 = \frac{4}{5}$.

8.
Η συνδιασπορά των X, Y είναι $cov(X, Y) = 0$ αφού οι X, Y είναι ανεξάρτητες. Άρα η (X, Y) έχει μέση τιμή $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ και πίνακα συνδιακυμάνσεων $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Επιπλέον οι X, Y ακολουθούν μονοδιάστατη κανονική κατανομή, άρα η (X, Y) ακολουθεί διδιάστατη κανονική κατανομή. Επομένως $(X, Y) \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Αφού οι X, Y είναι ανεξάρτητες, η $X + Y$ ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά 2. Επομένως η $(X + Y, Y)$ ακολουθεί διδιάστατη κανονική κατανομή με μέση τιμή $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Επίσης $cov(X + Y, Y) = cov(X, Y) + VarY = 1$. Άρα ο πίνακας συνδιακυμάνσεων της (X, Y) είναι $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Επομένως $(X + Y, Y) \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Οι $X + Y, Y$ ως συσχετισμένες δεν είναι ανεξάρτητες.

9.
Θέλουμε $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$, άρα $1 = \int_0^{+\infty} ce^{-3x}dx = -\frac{c}{3}e^{-3x}|_0^{+\infty} = \frac{c}{3}$, άρα $c = 3$.

$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{+\infty} e^{tx}3e^{-3x}dx = 3\int_0^{+\infty} e^{(t-3)x}dx = \frac{3}{t-3}e^{(t-3)x}|_0^{+\infty} = \frac{3}{3-t}$, για κάθε $t < 3$.

Έχουμε $EX = M'_X(0) = \frac{3}{(3-t)^2}|_{t=0} = \frac{1}{3}$ και $E(X^2) = M''_X(0) = \frac{6}{(3-t)^3}|_{t=0} = \frac{2}{9}$.

Οι X_1, X_2 έχουν την ίδια κατανομή με αυτήν της X, άρα $M_{X_1}(t) = M_{X_2}(t) = M_X(t) = \frac{3}{3-t}$, $t < 3$

και αφού επιπλέον οι X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες, $M_{X_1+X_2}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) = \frac{9}{(3-t)^2}$, $t < 3$.