

## Μιγαδική Ανάλυση

### Θέματα Α

Σε κάθε θέμα δίνεται μία πρόταση. Προσδιορίστε αν είναι Σωστή ή Λάθος. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

1.

Δίνονται ανοικτό σύνολο  $\Omega$  και αρμονικές συναρτήσεις  $u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Τότε η μιγαδική συνάρτηση  $f = u + iv$  είναι ολόμορφη στο  $\Omega$ .

2.

Η συνάρτηση  $v(x, y) = 2i + \sin(xy)$  είναι αρμονική στον  $\mathbb{R}^2$ .

3.

Υπάρχει συνάρτηση  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  η οποία έχει όλες τις παρακάτω ιδιότητες:

(α)  $f \in H(\mathbb{D} \setminus \{0\})$ ,

(β) η  $f$  δεν είναι φραγμένη,

(γ)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(1/n) = 2$ ,

(δ)  $\forall z \in \mathbb{D}, |f(z)| > 1$ .

4.

Δίνεται συνάρτηση  $f$  ολόμορφη στον δίσκο  $D(0, 3)$ . Αν  $|f(2e^{it})| = 4, \forall t \in [0, 2\pi]$ , τότε η  $f$  είναι σταθερή.

5.

Αν μία συνάρτηση είναι ακέραια και μη σταθερή, τότε έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

6.

Αν η  $f$  είναι ολόμορφη στον τόπο  $D$  και για κάθε  $z \in D$  ισχύει  $|f(z) - i| + |f(z) + i| = 4$ , τότε η πραγματική συνάρτηση  $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$  είναι σταθερή στο  $D$ .