Πανεπιστήμιο Κρήτης - Σεπτέμβριος 2019

Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα

1.

Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 5 & 10 & -4 & 6 \end{bmatrix}$

1) Βρείτε βάσεις για τον χώρο στηλων και τον χώρο γραμμών του A. Ποιές είναι οι διαστάσεις των χώρων που βρήκατε;

2) Τί συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν τα b_1, b_2, b_3 ώστε το διάνυσμα (b_1, b_2, b_3) να ανήκει στον χώρο στηλών του A;

3) Βρείτε μία βάση για τον μηδενόχωρο $\mathcal{N}(A)$ του A.

4) Δείξτε ότι $v = (2, -4, -3, 3) \in \mathcal{N}(A)$ και εκφράστε το v με συντεταγμένες ως προς την βάση που βρήκατε στο 3).

2.

1) Έστω $p(x) = x^3 - x^2 + 2x + 3, q(x) = x^3 + x^2 + x - 1, r(x) = x^3 + 2x + 2$ και $s(x) = x^3 + ax^2 + 2x + 5$. Βρείτε για ποιά $a \in \mathbb{R}$ είναι το σύνολο των πολυωνύμων $\{p(x), q(x), r(x), s(x)\}$ γραμμικώς ανεξάρτητο.

2) Στον χώρο $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων, εξετάστε αν οι συναρτήσεις x, e^x, e^{-x} είναι γραμμικά ανεξάρτητες ή όχι.

3.

Μία από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμική. Αφού βρείτε ποια είναι (ή ποιές δεν είναι) βρείτε τον πίνακα της απεικόνισης ως προς βάση της αρεσκείας σας και προσδιορίστε τον πυρήνα $KerT$ και την εικόνα ImT της απεικόνισης. Είναι επιμορφισμός; Είναι μονομορφισμός;

1) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x - y, 0, e^z)$.

2) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$, $T(p(x)) = 2p'(x) + 3x$ (όπου $\mathcal{P}_2$ είναι το σύνολο των πολυωνύμων βαθμού το πολύ 2.)

3) $T : Mat_2(\mathbb{R}) \to Mat_2(\mathbb{R})$, $T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - y & z \\ w & w \end{bmatrix}$ (όπου $Mat_2(\mathbb{R})$ είναι το σύνολο των 2×2 πινάκων με πραγματικά στοιχεία.)

4.

Βρείτε ποιά από τα παρακάτω σύνολα V είναι υπόχωροι του χώρου W που δίνεται. Για όσα είναι υπόχωροι προσδιορίστε διάσταση και μία βάση τους.

1) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x = y = z\}, W = \mathbb{R}^3$.

2) $V = \left\{A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in Mat_2(\mathbb{R}) : \det(A) = 0\right\}, W = Mat_2(\mathbb{R})$.