Πανεπιστήμιο Κρήτης - Ιούνιος 2021

Διαφορικές Εξισώσεις

1.
Δίνεται η πρώτης τάξης διαφορική εξίσωση, για x σε κάποια γειτονία του 1,

$$x + y^2 + xy\frac{dy}{dx}.$$

α′) Προσδιορίστε ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu = \mu(x)$ που καθιστά την εξίσωση πλήρη.

β′) Προσδιορίστε την γενική λύση της εξίσωσης σε πεπλεγμένη μορφή.

γ′) Προσδιορίστε την λύση του προβήματος Cauchy για την εξίσωση συνοδευόμενη από την αρχική συνθήκη $y(1) = \sqrt{\frac{11}{3}}$ και το ευρύτερο διάστημα που περιέχει το $x = 1$ όπου αυτή ορίζεται.

2.
Δίνεται το γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης

$$\frac{dq}{dt} = p,\ \frac{dp}{dt} = q - 2\cos t,\ t \in \mathbb{R}.$$

α′) Διατυπώστε την γραμική εξίσωση δεύτερης τάξης που ικανοποιεί η συνάρτηση $q(t)$.

β′) Προσδιορίστε την γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης της παραπάνω.

γ′) Προσδιορίστε την γενική λύση του συστήματος εξισώσεων.

3.
Δίνονται, για $x \in (-\pi, \pi)$, η συνάρτηση $\phi(x) = \sin x + \sin 2x$ και το ορθογώνιο σύστημα συναρτήσεων $S = \{\sin x, \sin 2x, \sin 3x, ...\}$.

α′) Υπολογίστε τους συντελεστές Fourier $a_1, a_2, a_3, ...$ της ϕ ως προς το S.

Δίνεται το πρόβλημα Cauchy - Dirichlet για την εξίσωση θερμότητας

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times (0, \pi) \\ u(0, x) = \sin x + \sin 2x, x \in (0, \pi) \\ u(t, 0) = 0, u(t, \pi) = 0, t \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

β′) Προσδιορίστε όλες τις μη τετριμμένες λύσεις της εξίσωσης θερμότητας στο χωρίο $\mathbb{R}_+ \times (0, \pi)$, της μορφής $T_k(t)X_k(x)$, για $k = 1, 2, 3, ...$ που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες Dirichlet του προβλήματος.

γ′) Προσδιορίστε την λύση του προβλήματος ως την σειρά $u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k(x)$, επιβάλλοντας σε αυτήν την αρχική συνθήκη του προβλήματος.