Πανεπιστήμιο Κρήτης - Σεπτέμβριος 2019

Διακριτά Μαθηματικά

1.
Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 3$ υπάρχουν n διαφορετικοί ανά δύο διαιρέτες του $n!$ τέτοιοι ώστε το άθροισμά τους να ισούται με $n!$.

Υπόδειξη: Αποδείξτε την ισχυρότερη πρόταση ένας εκ των διαιρετών είναι το 1.

2.
Πόσοι εξαψήφιοι θετικοί ακέραιοι αριθμοί υπάρχουν με τους παρακάτω περιορισμούς;

(α) Κάθε ψηφίο είναι διαφορετικό.
(β) Κάθε ψηφίο είναι διαφορετικό και ο αριθμός είναι άρτιος.
(γ) Το άθροισμα των ψηφίων ισούται με 10 ή ο αριθμός είναι πολλαπλάσιος του 10.
(δ) Το άθροισμα των ψηφίων ισούται με 15.
(ε) Τα ψηφία είναι ανά δύο (όχι όμως ανά τέσσερα) ίδια.

3.
Αποδείξτε με συνδυαστικό επιχείρημα την ταυτότητα

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}.$$

Υπόδειξη: Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω n στοιχεία προερχόμενα από δύο σύνολα μεγέθους r και s αντίστοιχα;

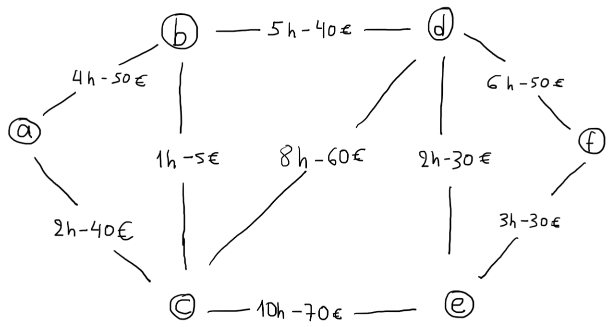
4.
Δίνεται ότι $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$. Βρείτε κλειστό τύπο για την ακολουθία $a_k = 3a_{k-1} + 4^{k-1}$, $k \geq 1$ με αρχική συνθήκη $a_0 = 1$.

5.
Σχεδιάστε ή περιγράψτε ένα απλό γράφημα με τους παρακάτω βαθμούς κορυφών. Αν δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα εξηγείστε το γιατί. Έπειτα εξηγείστε αν το γράφημα αυτό (όταν υπάρχει) έχει μονοπάτι ή κύκλο Euler.

(α) 0,1,2,3,4,4
(β) $\underbrace{3,...,3}_{n \text{ φορές}}$
(γ) $\underbrace{n,...,n}_{m \text{ φορές}},\underbrace{m,...,m}_{n \text{ φορές}}$
(δ) 4,4,4,3,3,2,2

6.
Αποδείξτε ότι ένα δέντρο $n \geq 3$ κορυφών έχει το πολύ $n-1$ φύλλα. Σχεδιάστε ένα δέντρο με 7 κορυφές και 6 φύλλα.

7.
Στο παρακάτω γράφημα αποτυπώνονται η διάρκεια και το κόστος της αντίστοιχης διαδρομής.



Χρησιμοποιήστε τον αλγόριθμο του Dijkstra για να βρείτε

(α) την συντομότερη και

(β) την οικονομικότερη

διαδρομή από την πόλη a στην πόλη f. Σημειώστε με κάποιον τρόπο τα βήματα των αλγορίθμων.

Λύσεις

1.
Για $n = 3$ έχουμε $n! = 6$ και το 6 έχει διαιρέτες τους αριθμούς 1,2 και 3 των οποίων το άθροισμα ειναι 6. Για $n \geq 4$ θα δείξουμε με επαγωγή ότι υπάρχουν αυτοί οι διαιρέτες $d_1 < d_2 < ... < d_n$ και μάλιστα $d_1 = 0, d_2 = n$ και $d_n = \frac{n_2!}{2}$. Για $n = 4$ παίρνουμε τους $d_1 = 0, d_2 = 4, d_3 = 8$ και $d_4 = 12$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για n. Έχουμε λοιπόν $d_1 < d_2 < ... < d_n$ με $d_1 = 0, d_2 = n$, $d_n = \frac{n_2!}{2}$ και $d_1 + ... + d_n = n!$. Ορίζουμε $d'_1 = 0, d'_2 = n+1, d'_3 = (n-1)(n+1), d'_i = (n+1)d_{i-1}, 4 \leq i \leq n+1$. Εύκολα βλέπουμε ότι $d'_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2}$ και ότι οι $d'_1, ..., d'_{n+1}$ είναι διαιρέτες του $(n+1)!$. Επίσης, $d'_1 + ... + d'_{n+1} = 0 + n + 1 + (n-1)(n+1) + (n+1)(d_3 + ... + d_n) = (n+1)(1 + n - 1 + d_3 + ... + d_n) = (n+1)(d_1 + ... + d_n) = (n+1)n! = (n+1)!$.

2.
Να σημειώσουμε ότι το πρώτο ψηφίο κάθε θετικού ακέραιου δεν είναι 0.

(α) Για το πρώτο ψηφίο έχουμε 9 επιλογές, για το δεύτερο 9, για το τρίτο 8, για το τέταρτο 7, για το πέμπτο 6 και για το έκτο 5. Υπάρχουν λοιπόν $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ αριθμοί.

(β) Ένας θετικός ακέραιος αριθμός είναι άρτιος αν και μόνο αν το τελευταίο του ψηφίο είναι άρτιο. Για να εξασφαλίσουμε λοιπόν ότι είναι άρτιος, για το έκτο ψηφίο έχουμε 5 επιλογές από τα ψηφία 0, 2, 4, 6 και 8. Αν επιλέξαμε το 0 για τελευταίο ψηφίο, για το πρώτο ψηφίο έχουμε 9 επιλογές, για το δεύτερο 8, για το τρίτο 7, για το τέταρτο 6 και για το πέμπτο 5. Αν δεν επιλέξαμε το 0 για τελευταίο ψηφίο, για το πρώτο ψηφίο έχουμε 8 επιλογές, για το δεύτερο 8, για το τρίτο 7, για το τέταρτο 6 και για το πέμπτο 5. Υπάρχουν $5 \cdot (9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5)$ αριθμοί.

(γ) Μετράμε i) πόσοι έχουν άθροισμα ψηφίων 10, ii) πόσοι είναι πολλαπλάσια του 10 και iii) πόσοι έχουν άθροισμα ψηφίων 10 και ταυτόχρονα είναι πολλαπάσια του 10.

i) Θέλουμε το άθροισμα των ψηφίων να είναι 10. Άρα έχουμε 10 μονάδες (όμοιες), ένα ψηφίο το βλέπουμε σαν ένα δοχείο με τόσες μονάδες μέσα όσες και ο αριθμός που αντιπροσωπεύει, κάθε δοχείο έχει χωρητικότητα 9 και το πολύ ένα δοχείο μπορεί να υπερβεί την χωρητικότητά του.

Γενικά, έστω ότι έχουμε n όμοια αντικείμενα και k διακεκριμένα δοχεία των οποίων οι χωρητικότητες είναι $c_1, c_2, ..., c_k$. Τότε υπάρχουν

$$\binom{n+k-1}{k-1} - \sum_{m=1}^{k} \sum_{\{i_1,...,i_m\} \subseteq \{1,...,k\}} \binom{n+k-(c_{i_1}+...+c_{i_m})-m-1}{k-1}$$

τρόποι να μοιραστούν τα αντικείμενα στα δοχεία.

Ειδικότερα, αν το πολύ ένα δοχείο μπορεί να υπερβεί την χωρητικότητά του, τότε υπάρχουν

$$\binom{n+k-1}{k-1} - \sum_{i=1}^{k} \binom{n+k-c_i-2}{k-1}$$

τρόποι να μοιραστούν τα αντικείμενα στα δοχεία.

Έχουμε να μοιράσουμε λοιπόν 10 μονάδες σε 6 διακεκριμένα δοχεία ώστε το πρώτο δοχείο να μην μείνει άδειο (ώστε το πρώτο ψηφίο να είναι μη μηδενικό). Οπότε τοποθετούμε μία μονάδα στο πρώτο δοχείο με έναν μοναδικό τρόπο, οπότε οι χωρητικότητες γίνονται 8,9,9,9,9,9, και τις υπόλοιπες 9 μονάδες στα 6 δοχεία με $\binom{9+6-1}{6-1}-\binom{9+6-8-2}{6-1}-5\binom{9+6-9-2}{6-1}=\binom{14}{5}-1$ τρόπους.

ii) Ένας αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 10 αν και μόνο αν το τελευταίο του ψηφίο είναι 0. Άρα για το πρώτο ψηφίο έχουμε 9 επιλογές, για τα επόμενα 4 ψηφία έχουμε από 10 επιλογές για το καθένα και για το έκτο μόνο μία. Άρα $9 \cdot 10^4$ αριθμοί είναι πολλαπλάσια του 10.

iii) Τοποθετούμε μία μονάδα στο πρώτο δοχείο. Οι χωρητικότητες πλέον είναι 8,9,9,9,9,0 και έχουμε 9 μονάδες. Αυτό γίνεται με $\binom{9+6-1}{6-1}-\binom{9+6-8-2}{6-1}-4\binom{9+6-9-2}{6-1}-\binom{9+6-0-2}{6-1}=\binom{14}{5}-\binom{5}{5}-4\binom{4}{5}-\binom{13}{5}=\binom{14}{5}-1-\binom{13}{5}$ τρόπους.

Επομένως το πλήθος των αριθμών με τις δεδομένες ιδιότητες είναι $\binom{14}{5}-1+9\cdot 10^4-\binom{14}{5}+1+\binom{13}{5}=9\cdot 10^4+\binom{13}{5}$.

(δ) Έχουμε 15 μονάδες. Τοποθετούμε μία στο πρώτο δοχείο οπότε μένουν 14 μονάδες και χωρητικότητες 8,9,9,9,9,9. Οι μονάδες μοιράζονται με $\binom{14+6-1}{6-1}-\binom{14+6-8-2}{6-1}-5\binom{14+6-9-2}{6-1}=\binom{19}{5}-\binom{10}{5}-5\binom{9}{5}$ τρόπους.

(ε) Πρέπει να χρησιμοποιήσουμε 3 μόνο ψηφία, καθένα 2 φορές.

Περίπτωση 1: υπάρχει το ψηφίο 0. Επιλέγουμε ποια άλλα 2 ψηφία θα χρησιμοποιήσουμε από τα 9 με $\binom{9}{2}$ τρόπους. Επιλέγουμε ένα από αυτά τα ψηφία με 2 τρόπους (έχουμε 2 από αυτά) τοποθετούμε το ένα στην πρώτη θέση και το άλλο σε κάποια άλλη θέση με 5 τρόπους. Από τις υπόλοιπες 4 θέσεις επιλέγουμε 2 με $\binom{4}{2}$ τρόπους και τοποθετούμε τα άλλα δύο ψηφία (με έναν τρόπο αφού είναι όμοια). Τα μηδενικά τα τοποθετούμε στις υπόλοιπες δύο θέσεις με μοναδικό τρόπο. Συνολικά $\binom{9}{2}2\cdot 5\binom{4}{2}$ τρόποι.

Περίπτωση 2: δεν υπάρχει το ψηφίο 0. Επιλέγουμε ποιά ψηφία θα χρησιμοποιήσουμε από τα 9 (λείπει το 0) με $\binom{9}{3}$ τρόπους. Εδώ δεν περιοριζόμαστε για το πρώτο ψηφίο. Επιλέγουμε 2 θέσεις από τις 6 με $\binom{6}{2}$ τρόπους και τοποθετούμε 2 ίδια ψηφία. Επιλέγουμε 2 από τις υπόλοιπες 4 θέσεις με $\binom{4}{2}$ τρόπους και τοποθετούμε κάποια άλλα 2 ίδια ψηφία. Τέλος τοποθετούμε τα υπόλοιπα 2 ίδια ψηφία στις υπόλοιπες 2 θέσεις με μοναδικό τρόπο. Έχουμε λοιπόν $\binom{9}{3}\binom{6}{2}\binom{4}{2}$ τρόπους.

Οι δύο περιπτώσεις δεν έχουν κοινά στοιχεία εξαψήφιων αριθμών άρα υπάρχουν $\binom{9}{2}2\cdot 5\binom{4}{2}+\binom{9}{3}\binom{6}{2}\binom{4}{2}$ αριθμούς με την ζητούμενη ιδιότητα.

3.
Έστω A, B δύο ξένα σύνολα με r και s στοιχεία αντίστοιχα. Τότε το σύνολο $A \cup B$ περιέχει $r+s$ στοιχεία. Θα μετρήσουμε με δύο τρόπους πόσα υποσύνολα του $A \cup B$ με n στοιχεία υπάρχουν.

Πρώτος τρόπος. Θέλουμε να επιλέξουμε n από $r+s$ στοιχεία. Αυτό γίνεται με $\binom{r+s}{n}$ τρόπους.

Δεύτερος τρόπος. Από το A μπορεί να προέρχονται $0, 1, 2, ..., n-1$ ή n στοιχεία. Έστω λοιπόν ότι προέρχονται $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ στοιχεία από το A. Αυτά τα επιλέγουμε με $\binom{r}{k}$ τρόπους. Τα υπόλοιπα $n-k$ στοιχεία προέρχονται από το B και τα επιλέγουμε με $\binom{s}{n-k}$ τρόπους. Άρα με $\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}$ τρόπους επιλέγονται τα σύνολα A, B με το A να έχει k στοιχεία. Αθροίζουμε όλες αυτλές τις ξένες περιπτώσεις και παίρνουμε $\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}$ τρόπους επιλογής των A, B.

Επομένως

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}=\binom{r+s}{n}.$$

4.
Έστω $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ και $G_1(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{k-1}x^k$ αυτή της $(a_{k-1})_{k=1}^{\infty}$. Έχουμε $G_1(x)=x(G(x)-a_0)$. Η γεννήτρια συνάρτηση της $(4^{k-1})_{k=1}^{\infty}$ είναι η $\frac{x}{1-4x}$. Από την αναδρομική σχέση τότε παίρνουμε $G(x)-a_0=3x(G(x)-a_0)+\frac{x}{1-4x}\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow G(x)=1+\frac{x}{(1-4x)(1-3x)}=1+\frac{4x}{1-4x}-\frac{3x}{1-3x}=1+4x\sum_{k=0}^{\infty}4^kx^k+3x\sum_{k=0}^{\infty}3^kx^k=1+\sum_{k=1}^{\infty}(3^k+4^k)x^k$. Επομένως $a_0=1$ και $a_k=3^k+4^k$ για $k\geq 1$.

5.
(α) Η ύπαρξη αυτής της ακολουθίας βαθμών είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη της ακολουθίας βαθμών 1, 2, 3, 4, 4. Σε ένα τέτοιο γράφημα με 5 κορυφές θα είχαμε 2 κορυφές (αυτές με βαθμό 4) οι οποίες συνδέονται με ακμή με κάθε άλλη κορυφή, άρα δεν θα υπήρχε κορυφή με βαθμό 1. Άρα δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα.

(β) Το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών ισούται με $2|E|$, όπου E το σύνολο των ακμών, άρα είναι άρτιος αριθμός. Άρα θέλουμε το $3n$ να είναι άρτιος. Αυτό ισοδυναμεί με το ότι το n είναι άρτιος. Άρα το n είναι της μορφής $n=4k+2$, $k=0,1,2,...$ ή $n=4k$, $k=0,1,2,....$

Εξετάζουμε την περίπτωση όπου $n=4k+2$.

Προφανώς για $k=0$ δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα. Θα δείξουμε ότι για $k=1$ δεν υπάρχει τέτοιο διάγραμμα ενώ για $k=2$ υπάρχει, βασιζόμενοι στον ακόλουθο αλγόριθμο:

Έστω $d_1\leq d_2\leq ...\leq d_n$ ακολουθία θετικών ακέραιων. Ορίζουμε την ακολουθία $(d'_k)_{k=1}^{n-1}$ με

$$d'_k=\begin{cases} d_k & ,k=1,2,...,n-d_n-1\\ d_k-1 & ,k=n-d_n,...,n-1\end{cases}$$

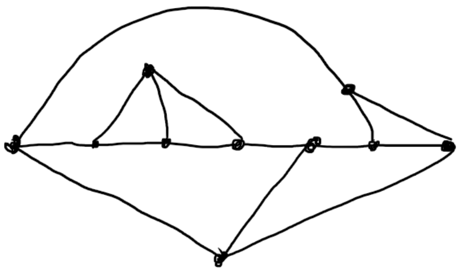
Τότε υπάρχει γράφημα με ακολουθία βαθμών την $(d_k)_{k=1}^{n}$ αν και μόνο αν υπάρχει γράφημα με ακολουθία βαθμών την $(d'_k)_{k=1}^{n-1}$

Για $k=1$ εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο: $3,3,3,3,3,3\rightarrow 3,3,2,2,2,\leftrightarrow 2,2,2,3,3\rightarrow 2,1,1,2\leftrightarrow 1,1,2,2$

Προφανώς, η τελευταία ακολουθία δεν είναι ακολουθία βαθμών γραφήματος, άρα δεν είναι και η αρχική.

Για $k=2$:
$3,3,3,3,3,3,3,3,3,3\rightarrow 3,3,3,3,3,3,2,2,2\leftrightarrow 2,2,2,3,3,3,3,3,3\rightarrow 2,2,2,3,3,2,2,2$
$\leftrightarrow 2,2,2,2,2,2,3,3\rightarrow 2,2,2,2,1,1,2\leftrightarrow 1,1,2,2,2,2,2\rightarrow 1,1,2,2,1,1\leftrightarrow 1,1,1,1,2,2\rightarrow$
$1,1,1,0,1$

Η τελευταία ακολουθία είναι ακολουθία βαθμών του γραφήματος με κορυφές $\{1,2,3,4,5\}$ και ακμές τις $\{\{2,3\},\{4,5\}\}$. Για να κατασκευάσουμε το γράφημα με ακολουθία βαθμών την αρχική, χρησιμοποιούμε το γράφημα με ακολουθία κορυφών την τελευταία του αλγιρίθμου και τα βήματα του αλγορίθμου αντίστροφα ώστε σε κάθε βήμα να προσθέτουμε μία κορυφή και να την συνδέουμε με ακμή με κατάλληλες κορυφές. Το παρακάτω γράφημα έχει ακολουθία βαθμών την δεδομένη:



Αυτό το γράφημα δεν έχει μονοπάτι ή κύκλο Euler αφού έχει περισσότερες από δύο κορυφές βαθμού 2.

Για $k > 2$, κατασκευάζουμε ένα γράφημα με $k-1$ συνεκτικές συνιστώσες μία εκ των οποίων το γράφημα του προηγούμενου σχήματος και οι υπόλοιπες ένα πλήρες γράφημα 4 κορυφών η κάθε μία. Σε αυτήν την περίπτωση, το γράφημα δεν έχει μονοπάτι ή κύκλο Euler αφού δεν είναι συνεκτικό.

Αν $n = 4k$, τότε φτιάχνουμε k συνεκτικές συνιστώσες κάθε μία από τις οποίες έχει 4 κορυφές και είναι πλήρες γράφημα. Για $k \geq 2$ το γράφημα δεν είναι συνεκτικό και δεν έχει μονοπάτι ή κύκλο Euler. Για $k = 1$ οι 4 κορυφές του γραφήματος είναι περιττού βαθμού, και δεν έχει μονοπάτι ή κύκλο Euler.

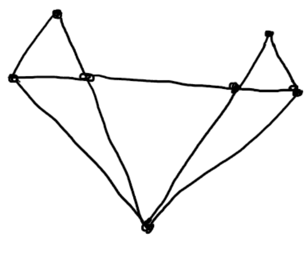
(γ) Φτιάχνουμε ένα πλήρες διμερές γράφημα με δύο σύνολα κορυφών μεγέθους m και n. Για μονοπάτι ή κύκλο Euler, εξετάζουμε τις εξής περιπτώσεις:

i) Αν τα m, n είναι και τα δύο άρτια, τότε όλες οι κορυφές του γραφήματος είναι άρτιου βαθμού και υπάρχουν μονοπάτι και κύκλος Euler.

ii) Αν ακριβώς ένα από τα m, n είναι περιττό, τότε δεν υπάρχει κύκλος Euler διότι υπάρχουν κορυφές περιττού βαθμού. Από την άλλη, για να υπάρχει μονοπάτι Euler, πρέπει ακριβώς 2 κορυφές κορυφές να είναι περιττού βαθμού. Σε αυτήν την περίπτωση, έχουμε αναγκαστικά το ένα από τα m, n να ισούται με 2 και το άλλο να είναι περιττό.

iii) Αν τα m, n είναι και τα δύο περιττά, δεν υπάρχει κύκλος Euler διότι υπάρχουν κορυφές περιττού βαθμού. Για να υπάρχει μονοπάτι Euler, πρέπει αναγκαστικά $m = n = 1$ για να υπάρχει μονοπάτι Euler (ώστε μόνο δύο κορυφές περιττού βαθμού να υπάρχουν).

(δ) Το παρακάτω γράφημα έχει ακολουθία βαθμών των κορυφών την δεδομένη:



Αυτό το γράφημα έχει μονοπάτι Euler διότι έχει ακριβώς δύο κορυφές περιττού βαθμού και δεν έχει κύκλο Euler διότι έχει κορυφή περιττού βαθμού.

6.

Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στο $n \geq 3$. Για $n = 3$, το μοναδικό (μέχρι ισομορφίας) δέντρο με n κορυφές έχει ακμές τις $\{1, 2\}$ και $\{2, 3\}$. Αυτό έχει ακριβώς $n - 1$ φύλλα. Ας υποθέσουμε ότι κάθε δέντρο με n κορυφές έχει το πολύ $n-1$ φύλλα και έστω ένα δέντρο T με $n+1$ κορυφές. Γνωρίζουμε ότι το T έχει τουλάχιστον ένα φύλλο. Αν αφεραίσουμε αυτό το φύλλο και την μοναδική ακμή που το συνδέει με κάποια άλλη κορυφή, προκύπτει ένα δέντρο T' με n κορυφές. Από επαγωγική υπόθεση, το T' έχει το πολύ $n - 1$ φύλλα. Τοποθετόντας πίσω την κορυφή και την ακμή που αφεραίσαμε, προκύπτει το T με τόσα φύλλα όσα και τα φύλλα του T' (αν η κορυφή που αφεραίσαμε συνδέεται με φύλλο του T') ή όσα και τα φύλλα του T' $+1$ (αν η κορυφή που αφεραίσαμε δεν συνδέεται με φύλλο του T'). Επομένως το T έχει το πολύ n φύλλα.
Ένα δέντρο με 7 κορυφές και 6 φύλλα έχει κορυφές τις $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ και ακμές
$\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{1, 7\}\}$.

7.

(α) Η πρώτη γραμμή του πίνακα αναγράφει τις κορυφές του γραφήματος. Η στήλη που αντιστοιχεί σε κάθε κορυφή περιέχει την ετικέτα απόστασης και την ετικέτα προηγούμενης κορυφής για κάθε βήμα. Σε κάθε γραμμή υπάρχουν κυκλωμένες οι ετικέτες αυτής της κορυφής που θεωρείται τρέχουσα για το αντίστοιχο βήμα και αυτή η κορυφή θεωρείται επεξεργασμένη για κάθε επόμενο βήμα.

a	b	c	d	e	f
(0,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-
(0,-)	(4,a)	(2,a)	(∞,-)	(∞,-)	(∞,-)
(0,-)	(3,c)	(2,a)	(10,c)	(12,c)	(∞,-)
(0,-)	(3,c)	(2,a)	(8,b)	(12,c)	(∞,-)
(0,-)	(3,c)	(2,a)	(8,b)	(10,d)	(14,d)
(0,-)	(3,c)	(2,a)	(8,b)	(10,d)	(13,e)

Ο αλγόριθμος Dijkstra δίνει ότι η συντομότερη διαδρομή από την a στην f είναι η $a \to c \to b \to d \to e \to f$.

(β)

a	b	c	d	e	f
$(0,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
$(0,-)$	$(50,a)$	$(40,a)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$
$(0,-)$	$(45,c)$	$(40,a)$	$(100,c)$	$(110,c)$	$(\infty,-)$
$(0,-)$	$(45,c)$	$(40,a)$	$(95,b)$	$(110,c)$	$(\infty,-)$
$(0,-)$	$(45,c)$	$(40,a)$	$(95,b)$	$(110,c)$	$(145,d)$
$(0,-)$	$(45,c)$	$(40,a)$	$(95,b)$	$(110,c)$	$(140,e)$

Ο αλγόριθμος Dijkstra δίνει ότι η οικονομικότερη διαδρομή από την a στην f είναι η $a \to c \to e \to f$.