

Γραμμική Άλγεβρα Ι

1.

Ο ορθογώνιος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ έχει πρώτη και δεύτερη στήλη τα διανύσματα $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ και $(-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το απόλυτο άθροισμα των στοιχείων της τρίτης στήλης του A .

2.

Υπολογίστε το μέτρο της προβολής του διανύσματος $u = (1, 2, 3)$ στον υπόχωρο που παράγεται από τα διανύσματα $w_1 = (0, 1, 1)$ και $w_2 = (1, 1, 0)$. Έπειτα υπολογίστε την απόσταση του σημείου $(1, 2, 3)$ από αυτόν τον υπόχωρο.

3.

Εξετάστε αν η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $f(x, y, z) = (x, 2xy, y + z)$ είναι ομομορφισμός, μονομορφισμός, επιμορφισμός ή ισομορφισμός.

4.

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Εξετάστε εάν ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος ή τριγωνοποιήσιμος πάνω από το \mathbb{R} ή το \mathbb{C} .

5.

Θεωρούμε ακολουθία (u_n) που δίνεται από την αναδρομική σχέση $u_{n+2} = \frac{2u_{n+1} + u_n}{3}$ με αρχικές συνθήκες $u_0 = 1, u_1 = 0$. Υπολογίστε το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.