

Αρμονική Ανάλυση

1.

Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $g \in L^\infty(\mathbb{T})$, δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(nt)dt = \hat{f}(0)\hat{g}(0).$$

2.

Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ παραγωγίσιμη και $f' \in L^3(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απόλυτα:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\bar{f}(n)| < +\infty.$$

3.

Αν $E \subseteq [0, 2\pi]$ και $\xi_n \in \mathbb{R}$ είναι οποιαδήποτε ακολουθία να δείξετε ότι

$$\int_E \cos^2(nx + \xi_n)dx \rightarrow \frac{1}{2}|E|.$$

4.

Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $-\hat{f}(-n) = \hat{f}(n)$ για $n \geq 0$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{f}(n)}{n} < +\infty.$$