Πανεπιστήμιο Κρήτης - Ιούλιος 2020

Αριθμητική Ανάλυση

1.
Βρείτε τον κανόνα ολοκλήρωσης $Q(f)$

$$Q(f) = c_0 f(0) + c_1 f(1) + c_2 f(2)$$

ο οποίος στο διάστημα $[0, 2]$ ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού το πολύ 2.

2.
Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2(x+1) + (x+1)^2 & x \in [-1, 0] \\ 3 + 5x + 3x^2 & x \in [0, 1] \\ 11 + 11(x-1) + 3(x-1)^2 - (x-1)^3 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

είναι φυσική κυβική spline;

3.
Έστω $f(x) = x^2 + 1$. Αν θεωρήσουμε τη μέθοδο του Νεύτωνα για αυτήν την f, δείξτε ότι η παραγόμενη ακολουθία (x_n) για κάθε x_0, δεν συγκλίνει.

4.
Για ποιά $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

θετικά ορισμένος; (Υπόδειξη: Ερευνήστε πότε η ανάλυση Cholesky ολοκληρώνετε)

5.
Το πολυώνυμο $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ έχει τις ακόλουθες τιμές

x	-2	-1	0	1	2	3
$p(x)$	31	5	1	1	11	61

Βρείτε ένα πολυώνυμο q που να λαμβάνει τις τιμές

x	-2	-1	0	1	2	3
$q(x)$	31	5	1	1	11	30

6.
Έστω $\alpha \in [0, \pi]$ και $0 < \epsilon < 1$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\alpha = x - \epsilon \sin(x)$. (Υπόδειξη: Δείξτε ότι το ζητούμενο x είναι το σταθερό σημείο μίας κατάλληλης συνάρτησης.)

7.
Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι αντιστρέψιμος και $\|\cdot\|$ μία φυσική νόρμα πινάκων. Τότε δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|Ax\| \geq \|x\| \left\|A^{-1}\right\|^{-1}.$$