

Απειροστικός Λογισμός Ι

1.

Υπολογίστε τα όρια εφ' όσον υπάρχουν ή δείξτε ότι δεν υπάρχουν

(i)

$$a_n = \sqrt[n]{n^4 + 3n^2 + 13}$$

(ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{-3}{2}n^2} \int_n^{n+1} e^{t^2} dt$$

2.

Δίδεται $p, q > 1$ είναι τέτοια ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Δείξτε την ανισότητα

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}, \text{ όπου } x, y > 0$$

Πότε η παραπάνω σχέση γίνεται ισότητα;

(Για την απόδειξη της ανισότητας μπορείτε να μελετήσετε κατάλληλη συνάρτηση της μεταβλητής $x > 0$ θεωρώντας την $y > 0$ παράμετρο.)

3.

(α) Υπολογίστε το όριο εφ' όσον υπάρχει ή δείξτε ότι δεν υπάρχει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x + 1) \sin \frac{1}{x^2}$$

(β) Εξετάστε κατά πόσον υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα (δεν χρειάζεται να το υπολογίσετε)

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

4.

Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{10}{n}}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}.$$