

Απειροστικός Λογισμός Ι

1.

Υπολογίστε τα όρια εφ' όσον υπάρχουν ή δείξτε ότι δεν υπάρχουν

(i) $a_n = \sqrt{n^4 + n^2} - \sqrt{n^4 + 1}$, (ii) $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{b_n}$, (iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\cos^2 x - \cos x + \frac{1}{2})$.

2.

Βρείτε το $a > 0$ για το οποίο η μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$y = a \ln x + 2a - x^2,$$

στο διάστημα $(0, +\infty)$ παίρνει την μικρότερη δυνατή τιμή. Ποιά είναι αυτή η τιμή;

3.

Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$,

$$x - \frac{x^3}{3} < \arctan x < x.$$

4.

Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(\sqrt[n]{n} + 0.1)^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{x}{1+x^3} dx.$$

5.

Υπολογίστε τα γενικευμένα ολοκληρώματα εφ' όσον υπάρχουν ή δείξτε ότι δεν υπάρχουν

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} - e^{-x}}{x} dx, \quad \int_0^1 \ln x dx.$$