Πανεπιστήμιο Κρήτης - Ιανουάριος 2020

Απειροστικός Λογισμός Ι

1.
Υπολογίστε τα όρια εφ᾽ όσον υπάρχουν ή δείξτε ότι δεν υπάρχουν

(i) $a_n = \sqrt{n^4+n^2} - \sqrt{n^4+1}$, (ii) $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{b_n}$, (iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\cos^2 x - \cos x + \frac{1}{2})$.

2.
Βρείτε το $a > 0$ για το οποίο η μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$y = a\ln x + 2a - x^2,$$

στο διάστημα $(0, +\infty)$ παίρνει την μικρότερη δυνατή τιμή. Ποιά είναι αυτή η τιμή;

3.
Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$,

$$x - \frac{x^3}{3} < \arctan x < x.$$

4.
Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(\sqrt[n]{n}+0.1)^n}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{x}{1+x^3}dx.$$

5.
Υπολογίστε τα γενικευμένα ολοκληρώματα εφ᾽ όσον υπάρχουν ή δείξτε ότι δεν υπάρχουν

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx, \ \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}-e^{-x}}{x}dx, \ \int_0^1 \ln x dx.$$

Λύσεις

1.

(i) Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με την κατάλληλη συζυγή παράσταση:
$a_n = \frac{(\sqrt{n^4+n^2}-\sqrt{n^4+1})(\sqrt{n^4+n^2}+\sqrt{n^4+1})}{\sqrt{n^4+n^2}+\sqrt{n^4+1}} = \frac{n^4+n^2-n^4-1}{\sqrt{n^4+n^2}+\sqrt{n^4+1}} = \frac{n^2-1}{\sqrt{n^4(1+\frac{1}{n^2})}+\sqrt{n^4(1+\frac{1}{n^4})}} = \frac{n^2-1}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}\right)} = \frac{1-\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}} \to \frac{1-0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}$.

(ii) Θα διακρίνουμε περιπτώσεις, αν $b_0 > 0$ ή $b_0 < 0$. Θα αποδείξουμε ότι αν $b_0 > 0$ τότε η (b_n) είναι γνησίως αύξουσα και $b_n \to +\infty$. Όμοια αποδεικνύεται ότι αν $b_0 < 0$ τότε η (b_n) είναι γνησίως φθίνουσα και $b_n \to -\infty$.
Δείχνουμε αρχικά με επαγωγή ότι $b_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$. Για $n = 0$ ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει για n και το δείχνουμε για $n+1$. Έχουμε δηλαδή $b_n > 0$. Τότε $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{b_n} > 0$. Άρα ισχύει για κάθε n.
Αφού λοιπόν $b_n > 0$, $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{b_n} > b_n$. Η (b_n) επομένως είναι γνησίως αύξουσα. Άρα συγκλίνει είτε σε κάποιο $b > b_0 > 0$ είτε στο $+\infty$. Ας υποθέσουμε ότι συγκλίνει στο $b > b_0$. Παίρνουμε όρια στην σχέση $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{b_n}$ και έχουμε $b = b + \frac{1}{b}$. Άρα $\frac{1}{b} = 0$, αντίφαση.

(iii) Δείχνουμε κατάρχάς ότι $\cos^2 x - \cos x + \frac{1}{2} \geq c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, για κάποια θετική σταθερά c. Θέτοντας $y = \cos x$, θεωρούμε το πολυώνυμο $y^2 - y + \frac{1}{2}$ το οποίο έχει διακρίνουσα $\Delta = (-1^2) - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -1$ αρνητική. Άρα το πολυώνυμο διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ το οποίο είναι θετικό. Αφού επιπλέον ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι θετικός, αυτό το πολυώνυμο παίρνει ελάχιστη τιμή, έστω $c > 0$. Άρα έχουμε το ζητούμενο. Επομέμως $\sqrt{x}(\cos^2 x - \cos x + \frac{1}{2}) \geq c\sqrt{x} \to +\infty$ καθώς $x \to +\infty$. Επομένως $\sqrt{x}(\cos^2 x - \cos x + \frac{1}{2}) \to +\infty$ καθώς $x \to +\infty$.

2.

Βρίσκουμε την μέγιστη τιμή της συνάρτησης για τυχαίο $a > 0$. Για κάθε $x > 0$ έχουμε $y'(x) = \frac{a}{x} - 2x = \frac{a-2x^2}{x} > 0 \Leftrightarrow 2x^2 < a \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{\frac{a}{2}}$. Επομένως η y είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \sqrt{\frac{a}{2}}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\sqrt{\frac{a}{2}}, +\infty)$. Άρα η y λαμβάνει την μεγιστή της τιμή στο $x = \sqrt{\frac{a}{2}}$ η οποία είναι $y(\sqrt{\frac{a}{2}}) = a \ln \sqrt{\frac{a}{2}} + 2a - \frac{a}{2} = \frac{1}{2} a \ln \frac{a}{2} + \frac{3a}{2}$. Θέλουμε λοιπόν να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση $M(a) = \frac{1}{2} a \ln \frac{a}{2} + \frac{3a}{2}$ για $a > 0$. Έχουμε $M'(a) = \frac{1}{2} \ln \frac{a}{2} + \frac{1}{2} a \frac{1}{2} \frac{2}{a} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \ln \frac{a}{2} + 2 > 0 \Leftrightarrow \ln a - \ln 2 > -4 \Leftrightarrow a > e^{\ln 2 - 4} = \frac{2}{e^4}$. Επομένως η M είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \frac{2}{e^4}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\frac{2}{e^4}, +\infty)$. Άρα η M παίρνει την ελάχιστή της τιμή στο $a = \frac{2}{e^4}$ και αυτή η τιμή είναι $M(\frac{2}{e^4}) = \frac{1}{2} \frac{2}{e^4} \ln \frac{2}{e^4} + \frac{3}{2} \frac{2}{e^4} = \frac{1}{e^4} \ln \frac{2}{e^4} + \frac{3}{e^4}$.

3.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \arctan x - x + \frac{x^3}{3}$, $x \geq 0$. Τότε $f'(x) = (\arctan x)' - 1 + x^2 = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 = \frac{1-1-x^2+x^2+x^4}{1+x^2} = \frac{x^4}{1+x^2} > 0$ για κάθε $x > 0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Άρα $f(x) > f(0) = 0$. Με παρόμοιο τρόπο δείχνεται και η δεύτερη ανισότητα θεωρώντας την $g(x) = \arctan x - x$, $x \geq 0$ και δείχνοντας ότι αυτή είναι γνησίως φθίνουσα.

4.

Για την πρώτη σειρά, έχουμε ότι

$$\frac{\sin \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} \to 1.$$

Άρα η δεδομένη σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ συγκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης. Η τελευταία σειρά συγλίνει αφού είναι της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ με $p > 1$.

Για την δεύτερη σειρά, θέτουμε $a_n = \frac{n^2}{(\sqrt[n]{n}+0.1)^n} > 0$ και χρησιμοποιούμε το κριτήριο ρίζας: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{n}+0.1} \to \frac{1}{1+0.1} = \frac{1}{1.1} < 1$. Άρα η σειρά συγκλίνει.

Για την τρίτη σειρά, θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{x}{1+x^3} dx = \int_1^{n+1} \frac{x}{1+x^3} dx$. Αν δείξουμε λοιπόν ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^3} dx$ συγκλίνει, τότε η ακολουθία (s_n) και, εξ ορισμού, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{x}{1+x^3} dx$ θα συγκλίνει. Πράγματι, έχουμε $\frac{\frac{x}{1+x^3}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^3}{1+x^3} \to 1$, άρα το $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^3} dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ συγκλίνει. Το τελευταίο γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει διότι είναι της μορφής $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ με $p > 1$. Επομένως η (s_n) συγκλίνει.

5.

Για το πρώτο γενικκευμένο ολοκλήρωμα, θεωρούμε το ορισμένο ολοκλήρωμα $I_M = \int_0^M e^{-\sqrt{x}} dx \overset{\sqrt{x}=u}{=} \int_0^{\sqrt{M}} e^{-u} 2u du = \int_0^{\sqrt{M}} \frac{2u}{e^u} du$. Γνωρίζουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{p(u)}{e^u} du$ συγκλίνει για κάθε πολυώνυμο p. Επομένως το όριο $\lim\limits_{M \to +\infty} \int_0^{\sqrt{M}} \frac{2u}{e^u} du$ υπάρχει, και το I_M συγκλίνει.

Για το δεύτερο γενικκευμένο ολοκλήρωμα, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{xe^x} dx$ συγκλίνει διότι είναι της μορφής $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{e^x} dx$ με f συνεχή και φραγμένη συνάρτηση στο $[1, +\infty)$. Άρα το $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}-e^{-x}}{x} dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει το $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}-e^{-x}}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{xe^x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$. Το τελευταίο δεν συγκλίνει διότι είναι της μορφής $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ με $p \le 1$.

Για το τρίτο γενικκευμένο ολοκλήρωμα, υπολογίζουμε, για $a \in (0,1)$, το $I_a = \int_a^1 \ln x dx = \int_a^1 (x)' \ln x dx = x \ln x|_a^1 - \int_a^1 x(\ln x)' dx = -a \ln a - \int_a^1 1 dx = -a \ln a - 1 + a$. Έπειτα υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{a \to 0^+} a \ln a = \lim\limits_{a \to 0^+} \frac{\ln a}{\frac{1}{a}} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim\limits_{a \to 0^+} \frac{\frac{1}{a}}{-\frac{1}{a^2}} = -\lim\limits_{a \to 0^+} a = 0$. Άρα $I_a \to -1$ καθώς $a \to 0^+$, και το ολοκλήρωμα συγκλίνει.