

Απειροστικός Λογισμός II

1.

Δίνεται η $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = (x^3 + y^3)e^{-x^2 - y^2}$$

Βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f .

2.

Θεωρούμε το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^a |y|^b}{|x| + y^2}.$$

Ελέγξτε με απόδειξη αν υπάρχει το όριο στις περιπτώσεις $(a, b) = (2/3, 4/3)$ και $(a, b) = (3/5, 4/5)$.

3.

Αν $g(t) = te^{\sin^2 t}$ και $f(x, y) = g\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$, $x + y \neq 0$, σε ποιά κατεύθυνση η κατά κατεύθυνση παράγωγος της f στο σημείο $(1,1)$ είναι (α) ίση με 0, (β) η μέγιστη δυνατή και (γ) η ελάχιστη δυνατή;

4.

Δίνεται το σύστημα 2 εξισώσεων

$$\begin{aligned}xyu^2 + u + v^2 &= 1 \\(x + y)u + 2e^{xuv} &= x^2 + 1\end{aligned}$$

Εξετάστε βάσει του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης αν το παραπάνω σύστημα μπορεί να λυθεί ως προς τα u, v ως συναρτήσεις $u = u(x, y)$ και $v = v(x, y)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης σε κάποια περιοχή του $(x_0, y_0) = (1, 0)$ έτσι ώστε να είναι $u(1, 0) = 0$, $v(1, 0) = 1$. Στην συνέχεια υπολογίστε την μερική παράγωγο $\frac{\partial v}{\partial x}$ στο σημείο $(x_0, y_0) = (1, 0)$.