Πανεπιστήμιο Κρήτης - Σεπτέμβριος 2018

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

1.
Για ποιές τιμές της σταθεράς $a \geq 0$ η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|^a}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & , x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & , x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο σημείο (0,0);

2.
Στον $\mathbb{R}^2$ προσδιορίστε, εφόσον υπάρχουν, τα τοπικά μέγιστα, τα τοπικά ελάχιστα και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης

$$f(x,y) = (1+e^y)\cos x - ye^y.$$

3.
Για την συνάρτηση

$$f(x,y) = 2xy + x^2 + 4y^2$$

προσδιορίστε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της στο κλειστό χωρίο

$$\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1.$$

4.
Δίνεται η καμπύλη $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με

$$\sigma(t) = (\sin t + e^{-t^2}, \cos t + e^{-t}, e^{2t}),\ t \in \mathbb{R},$$

και η επιφάνεια

$$S : x^2 + y^2 + 2xz + 2ye^z = 0.$$

α) Βρείτε την εφαπτόμενη ευθεία ϵ της καμπύλης στο σημείο $\sigma(0)$.
β) Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο Π της επιφάνειας S στο σημείο $(1,-1,0)$.
γ) Σε ποιό σημείο τέμνει η ευθεία ϵ το επίπεδο Π;

5.
Έστω $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ συναρτήσεις και

$$u(x,t) = x^2 + 2xt + t^2 + f(2x+t) + g(x+2t),\ x,t \in \mathbb{R}.$$

Να υπολογίσετε την παράσταση

$$A(x,t) = 2u_{tt}(x,t) - 5u_{tx}(x,t) + 2u_{xx}(x,t),\ x,t \in \mathbb{R}.$$

6.
Αποδείξτε ότι υπάρχει μία γειτονιά του σημείου (1,-1,1) και C^1 συναρτήσεις $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ που να λύνουν το σύστημα

$$\begin{aligned} x + y + z + u^2 + v^2 &= 2, \\ x + u^3 - v^3 + 3uv &= 2, \end{aligned}$$

$$u(1, -1, 1) = 1,\ v(1, -1, 1) = 0.$$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε το $u_x(1, -1, 1) + 3v_x(1, -1, 1)$.

Λύσεις

1.
Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους στο σημείο (0,0):

$f_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$ και
$f_y(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$. Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,0) αν και μόνο αν

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - [f(0,0) + f_x(0,0)(x-0) + f_y(0,0)(y-0)]}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

δηλαδή αν και μόνο αν

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x|y|^a}{x^2+y^2} \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \ (1)$$

Θα βρούμε όλα τα $a \geq 0$ ώστε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x|y|^a}{x^2+y^2} = 0$$

και τότε η (1) θα ισχύει. Έχουμε
$\left|\frac{x|y|^a}{x^2+y^2}\right| = \frac{|xy||y|^{a-1}}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)|y|^{a-1}}{x^2+y^2} = |y|^{a-1} \to 0$ καθώς $(x,y) \to (0,0)$ για $a > 1$.

Τώρα, για $a \leq 1$, περιοριζόμαστε στην καμπύλη $y = x$, $x > 0$ και δείχνουμε ότι το όριο που προκύπτει από αυτό της (1) δεν υπάρχει. Τότε δεν θα υπάρχει και το όριο της (1). Πράγματι:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x|x|^a}{x^2+x^2} \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2} x^{a-1} \sin\frac{1}{\sqrt{2x^2}} \ (2)$$

Το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{\sqrt{2x^2}}$ δεν υπάρχει αφού ο όρος $\sin\frac{1}{\sqrt{2x^2}}$ παίρνει άπειρς φορές την τιμή 1 και άπειρες φορές την τιμή -1 καθώς $x \to 0$. Άρα προφανώς το όριο (2) δεν υπάρχει για $a = 1$. Για $a < 1$, έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{a-1} = +\infty$, άρα ο όρος $\frac{1}{2}x^{a-1}\sin\frac{1}{\sqrt{2x^2}}$ γίνεται απεριόριστα μεγάλος με θετικό πρόσημο και ταυτόχρονα απεριόριστα μεγάλος με αρνητικό πρόσημο καθώς $x \to 0^+$. Άρα το όριο (2) δεν υπάρχει.

2.
Υπολογίζουμε τα κρίσιμα σημεία της f στον $\mathbb{R}^2$. Αυτά είναι εκείνα στα οποία μηδενίζεται η $\bigtriangledown f$ αφού η f είναι παραγωγίσιμη στον $\mathbb{R}^2$.
$\bigtriangledown f(x,y) = (-(1+e^y)\sin x, e^y\cos x - (1+y)e^y)$. Άρα $\bigtriangledown f(x,y) = (0,0)$ αν και μόνο αν $\sin x = 0$ και $\cos x = 1 + y$. Η πρώτη εξίσωση έχει λύσεις $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Αν $k \in \mathbb{Z}$ είναι άρτιο τότε $\cos x = 1$ και αν k είναι περιττό τότε $\cos x = -1$. Άρα οι λύσεις (x,y) είναι οι $(x,y) = (2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ και οι $(x,y) = ((2k-1)\pi, -2)$, $k \in \mathbb{Z}$.
Υπολογίζουμε την εσσιανή της f στα κρίσιμα σημεία:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -(1+e^y)\cos x & -e^y \sin x \\ -e^y \sin x & e^y \cos x - (2+y)e^y \end{pmatrix}$$

$$Hf(2k\pi, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Hf((2k-1)\pi,-2)=\begin{pmatrix}1+e^{-2} & 0\\ 0 & -e^{-2}\end{pmatrix}$$

Οι πίνακες $Hf(2k\pi,0)$ έχουν θετικές ιδιοτιμές άρα τα σημεία $(2k\pi,0)$ είναι τοπικά ελάχιστα ενώ οι πίνακες $Hf((2k-1)\pi,-2)$ έχουν ετερόσημες ιδιοτιμές άρα τα σημεία $((2k-1)\pi,-2)$ είναι σαγματικά.

3.
Υπολογίζουμε τα κρίσιμα σημεία της f στο εσωτερικό του χωρίου. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη συνάστηση, αυτά είναι τα σημεία που μηδενίζεται η $\bigtriangledown f$.
$\bigtriangledown f(x,y)=(2y+2x,2x+6y)=(0,0)$ αν και μόνο αν $(x,y)=(0,0)$. Επίσης $f(0,0)=0$. Τώρα μελετάμε τα ακρότατα της f στο σύνορο του χωρίου, μία παραμέτρηση του οποίου είναι η $\sigma(t)=(2\cos t,\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$. Ορίζουμε λοιπόν $g(t)=f(\sigma(t))=4\cos t\sin t+4\cos^2 t+4\sin^2 t=2\sin 2t+4$, $t\in[0,2\pi]$. Έχουμε
$g'(t)=4\cos 2t=0$ αν και μόνο αν $t=\frac{\pi}{4}$ ή $t=\frac{3\pi}{4}$ ή $t=\frac{5\pi}{4}$ ή $t=\frac{7\pi}{4}$.
Επίσης $g(0)=4$, $g(\frac{\pi}{4})=6$, $g(\frac{3\pi}{4})=2$, $g(\frac{5\pi}{4})=6$ και $g(\frac{7\pi}{4})=2$.
Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f στο συμπαγές χωρίο υπάρχει και είναι ίση με το μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο του συνόλου $\{0,4,2,6\}$, αντίστοιχα, δηλαδή 0 και 6, αντίστοιχα.

4.
α) Έχουμε $\sigma'(t)=(\cos t-2te^{-t^2},-\sin t-e^{-t},2e^{2t})$, $\sigma(0)=(1,2,1)$ και $\sigma'(0)=(1,-1,2)$. Άρα η ευθεία ϵ έχει μία παραμετρική μορφή $(x,y,z)=(1,2,1)+t(1,-1,2)$, $t\in\mathbb{R}$.

β) Θέτουμε $f(x,y,z)=x^2+y^2+2xz+2ye^z$. Ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο Π είναι το $\bigtriangledown f(1,-1,0)=(2x+2z,2y+2e^z,2x+2ye^z)|_{(1,-1,0)}=(2,0,0)$. Επομένως το Π έχει εξίσωση $2(x-1)+0(y-(-1))+0(z-0)=0$, ισοδύναμα $x=1$.

γ) Λύνουμε την εξίσωση $1+t=1$, άρα $t=0$. Αντικαθιστούμε αυτό το t στην παραμετρική μορφή της ϵ και βρίσκουμε το σημείο (1,2,1).

5.
Έχουμε

$$\begin{aligned}
u_t&=2x+2t+f'(2x+t)+2g'(x+2t)\\
u_{tt}&=2+f''(2x+t)+4g''(x+2t)\\
u_{tx}&=2+2f''(2x+t)+2g''(x+2t)\\
u_x&=2x+2t+2f'(2x+t)+g'(x+2t)\\
u_{xx}&=2+4f''(2x+t)+g''(x+2t)
\end{aligned}$$

Άρα $A(x,t)=4+2f''(2x+t)+8g''(x+2t)-10-10f''(2x+t)-10g''(x+2t)+4+8f''(2x+t)+2g''(x+2t)=-2$.

6.
Θεωρούμε την C^1 απεικόνιση $F=(f_1,f_2):\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^2$ με

$$F(x,y,z,u,v)=(x+y+z+u^2+v^2-2,x+u^3-v^3+3uv-2).$$

Υπολογίζουμε τον πίνακα $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix}$ στο σημείο $(1,-1,1,1,0)$. Αυτός είναι ο $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Ο A είναι αντιστρέψιμος με ορίζουσα $5 \neq 0$. Από το Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης υπάρχουν συναρτήσεις $u = u(x,y,z)$, $v = v(x,y,z)$ οι οποίες είναι C^1 σε μία περιοχή του σημείου $(1,-1,1)$ και οι οποίες λύνουν το σύστημα. Για να υπολογίσουμε τις $u_x(1,-1,1)$, $v_x(1,-1,1)$, παραγωγίζουμε ως προς x τις εξισώσεις, έπειτα θέτουμε $(x,y,z) = (1,-1,1)$ και παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} 1 + 2u_x(1,-1,1) &= 0 \\ 1 + 3u_x(1,-1,1) + 3v_x(1,-1,1) &= 0 \end{aligned}$$

από όπου παίρνουμε $u_x(1,-1,1) = -1/2$ και $v_x(1,-1,1) = 1/6$. Άρα $u_x(1,-1,1)+3v_x(1,-1,1) = 0$.