

Αναλυτική Γεωμετρία και Μιγαδικοί Αριθμοί

1.

(i) Σημειώστε τα σημεία P, Q, R στο επίπεδο τέτοια ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = \vec{RP}$ και $\vec{w} = \vec{RQ}$ να ικανοποιούν τις σχέσεις $|\vec{w}| = 2|\vec{u}|$ και $(\vec{w} - \vec{u}) \cdot \vec{u} = 0$. Υπολογίστε το a αν $|\vec{u} + \vec{w}| = a|\vec{u}|$. Βρείτε το διάνυσμα $pr_{\vec{w}}\vec{u}$.

(ii) Θεωρήστε την ευθεία ε με εξίσωση $x + 2y - 2 = 0$. Βρείτε την εξίσωση μιας ευθείας δ που να είναι κάθετη στην ε και σχηματίζει με την ε τον άξονα $x = 0$ τρίγωνο με εμβαδόν 6.

2.

Θεωρήστε την τετραγωνική πυραμίδα με βάση $ABCD$, όπου $A : (1, 0, 0)$, $B : (0, 1, 0)$, $C : (-1, 0, 0)$ και $D : (0, -1, 0)$ και κορυφή $E : (0, 0, t)$, $t > 0$. Βρείτε το t αν η απόσταση μεταξύ των ευθειών CE και AB είναι 1.

3.

(i) Βρείτε την τριγωνομετρική μορφή και σχεδιάστε σε ένα πρόχειρο σχήμα όλες τις λύσεις της εξίσωσης

$$z^5 = 16i(1 + i\sqrt{3})$$

(ii) Περιγράψτε γεωμετρικά το σύνολο των σημείων $z \in \mathbb{C}$ που ικανοποιούν την σχέση

$$|z^2 + 2iz - z| \leq \sqrt{5}|z|.$$

(iii) Βρείτε την εικόνα του κύκλου $|z - 2| = 1$ μέσω του μετασχηματισμού $f(z) = \frac{1}{z-1}$.

4.

(i) Βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων που περνούν από το σημείο $(1, 2)$ και εφάπτονται στον άξονα $x = 0$.

(ii) Βρείτε την γωνία μεταξύ των ασυμπτώτων της υπερβολής όταν η απόσταση μεταξύ των εστιών είναι διπλάσια της απόστασης μεταξύ των διευθετούσών.

5.

(i) Βρείτε την εξίσωση της οικογένειας σφαιρών που έχουν κέντρο στην ευθεία με εξισώσεις $y = 2x$, $z = 3y$ και εφάπτονται στο επίπεδο $z = 0$.

(ii) Συμπληρώστε τα τετράγωνα για να προσδιορίσετε την επιφάνεια που παριστάνει η εξίσωση

$$x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 8z = 0.$$