

## Αναλυτική Γεωμετρία και Μιγαδικοί Αριθμοί

1.

α'. Σημειώστε τα σημεία  $A, B, C, D, E, F$  στις κορυφές ενός κανονικού εξαγώνου πλευράς  $a$ , καθώς και το σημείο  $O$  στο κέντρο του εξαγώνου. Αν  $\vec{u} = \vec{OA}$  και  $\vec{v} = \vec{OB}$ , τότε:

i. Εκφράστε τις πλευρές του εξαγώνου ως γραμμικό συνδυασμό των  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$ .

ii. Εκφράστε το μήκος του  $\vec{u} + 2\vec{v}$  ως συνάρτηση του  $a$ .

β'. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι κάθετες προς την ευθεία  $-3x + 2y + 5 = 0$  και μαζί με τους άξονες του συστήματος αναφοράς περικλείουν τρίγωνο με εμβαδόν 6.

2.

Εάν  $A : (1, 0, 0), B : (0, 1, 0)$  και  $C : (0, 0, 1)$ , βρείτε ένα σημείο  $D$  τέτοιο ώστε το  $ABCD$  να είναι κανονικό τετράεδρο: οι τέσσερις πλευρές  $BCD, CDA, DAB$  ΚΑΙ  $ABC$  είναι ισόπλευρα τρίγωνα.

Βρείτε την απόσταση μεταξύ των ευθειών  $BC$  και  $AD$ .

3.

α'. Βρείτε σε τριγωνομετρική μορφή όλες και σχεδιάστε σε ένα πρόχειρο σχήμα τις λύσεις της εξίσωσης

$$z^4 = 5i(\sqrt{3} - i)$$

β'. Περιγράψτε γεωμετρικά το σύνολο των σημείων  $z \in \mathbb{C}$  που ικανοποιούν την

$$|z^2 - 5z + \sqrt{3}iz| \leq \sqrt{2}|iz|$$

γ'. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα De Moivre για να γράψετε τα  $\cos 4\theta, \sin 4\theta$  ως πολυώνυμα των  $\cos \theta, \sin \theta$ .

4.

α'. Βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων που περνούν από τα σημεία  $(2, 3)$  και  $(-1, 6)$  και εφάπτονται στον  $x$ -άξονα.

β'. Βρείτε την γωνία μεταξύ των ασύμπτωτων της υπερβολής όταν η απόσταση μεταξύ των εστιών είναι διπλάσια της απόστασης μεταξύ των διευθετουσών.

5.

α'. Βρείτε την εξίσωση της οικογένειας σφαιρών που έχουν κέντρο στην ευθεία με παραμετρική παράσταση  $(x, y, z) = (1, 0, 0) + t(0, 1, 1)$ , όπου  $t \in \mathbb{R}$ , και εφάπτονται στο επίπεδο  $y = 0$ .

β'. Συμπληρώστε τα τετράγωνα για να προσδιορίσετε την επιφάνεια που παριστάνει η εξίσωση

$$y^2 + x^2 - 4z^2 = 2x + 8z$$