Πανεπιστήμιο Κρήτης - Σεπτέμβριος 2020

Ανάλυση I

1.
Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία.

(i) Εάν τα όρια $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}$ υπάρχουν και ταυτίζονται, δείξτε με τον ορισμό ότι και το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ υπάρχει.

(ii) Εάν τα όρια $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n^2}$ υπάρχουν (δεν υποθέτουμε ότι ταυτίζονται), δείξτε ότι και το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ υπάρχει.

2.
Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία με τύπο

$$x_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2},\ n \in \mathbb{N}$$

Υπολογίστε με αιτιολόγηση τα $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$, $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

3.
(i) Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$.

(ii) Εξετάστε εάν η παρακάτω σειρά συγκλίνει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}.$$

4.
(i) Εάν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιοδική και το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ υπάρχει, δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

(ii) Εάν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ είναι συνεχής, δείξτε ότι είναι σταθερή.

5.
(i) (Θεωρία) Έστω ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι αύξουσα. Δείξτε ότι

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}\ , x, y \in \mathbb{R}.$$

(Υπόδειξη: Εφαρμόστε το Θεώρημα Μέσης Τιμής σε κατάλληλα διαστήματα.)

(ii) Δείξτε ότι για κάθε πραγματικό αριμό $p \ge 1$ ισχύει ότι

$$x^p + px^{p-1}y \le (x+y)^p \le 2^{p-1}(x^p + y^p),\ x, y > 0.$$