Πανεπιστήμιο Κρήτης - Σεπτέμβριος 2019

Ανάλυση Ι

1.
Δίνεται $f\mathbb{R} \to [1, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση.

(i) Έστω (x_n) μία τυχαία ακολουθία πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι οι ακολουθίες $\left(\frac{1+|x_n|}{e^{|x_n|}}\right)$, $\left(\frac{1}{f\left(\frac{1+|x_n|}{e^{|x_n|}}\right)}\right)$ έχουν συγκλίνουσες υπακολουθίες.

(ii) Δείξτε ότι η ακολουθία $\left(f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}\right)\right)$ συγκλίνει.

(iii) Υποθέτουμε επιπλέον ότι

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}\right)\right| < \frac{n^{2019}}{2019^n}$$

για άπειρα n. Δείξτε ότι $e \in f(\mathbb{R})$.

2.
(i) Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της παραγώγου για να δείξετε ότι η παράγωγος της $f(x) = 1/x$ υπάρχει στο 1 και είναι ίση με -1.

(ii) Δίνεται $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ η οποία έχει άπειρες ρίζες. Δείξτε ότι η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει άπειρες ρίζες.

3.
Δίνεται $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f'(x) > 1$ για κάθε $x > 0$.

(i) Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 > 2$ ώστε $\frac{f(x)}{x} > \frac{1}{2}$ για κάθε $x > x_0$.

(ii) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=[x_0]+1}^{\infty} \frac{1}{f(n)(\log(n+1))^2}, \quad \sum_{n=[x_0]+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{f(n)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{f(x)^n}, \ x > x_0.$$

4.
Δίνεται $f : A \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση, όπου $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και φραγμένο σύνολο.

(i) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $f(x_n) \to \inf f(A)$.

(ii) Είναι σωστό ότι $\sup(A + f(A)) = \sup A + \sup f(A)$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. Σημειώνουμε ότι $A + f(A) = \{x + f(y) : x, y \in A\}$.

(iii) Αν $f(x) = -x$ και $A = \{x_n : n = 1, 2, 3, ...\}$ όπου $x_n = \frac{1+2(-1)^n}{2n}, n = 1, 2, 3, ...$, υπολογίστε τα $\sup A, \inf A, \liminf x_n, \limsup x_n, \sup f(A), \inf f(A), \liminf f(x_n)$ και $\limsup f(x_n)$.